Vecteurs de l'espace

Chapitre 11

Vecteurs de l’espace — rappels et extensions

Dans l’espace à trois dimensions, les vecteurs généralisent ceux du plan : même définition (direction, sens, norme), mêmes opérations (somme, produit par un scalaire, Chasles).

Définition
Un *vecteur de l’espace* est défini par sa direction, son sens, sa norme. Les opérations usuelles s’appliquent :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \text{(Chasles)}$$

$$(k\vec{u}) + (k'\vec{u}) = (k + k')\vec{u}, \quad k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}.$$

Colinéarité et coplanarité

Définition
- Deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ sont *colinéaires* si $\vec{v} = k\vec{u}$ pour un certain $k \in \mathbb{R}$ (ou si $\vec{u} = \vec{0}$).
- Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont *coplanaires* s’ils peuvent être représentés par trois bipoints d’un même plan. Équivalemment : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ pour des réels a, b (si $\vec{u}, \vec{v}$ sont non colinéaires).

Base et repère de l’espace

Théorème — Base de l'espace
Trois vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ non coplanaires forment une *base* de l’espace. Tout vecteur $\vec{u}$ s’écrit de manière unique :

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

(x, y, z) sont les *coordonnées* de $\vec{u}$ dans la base.

Un *repère* $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ permet de donner des coordonnées $(x; y; z)$ à tout point M via $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

Opérations en coordonnées

Soient $\vec{u}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{v}(x_2; y_2; z_2)$, et $k \in \mathbb{R}$. Dans une base donnée :

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2),$$

$$k\vec{u} = (kx_1; ky_1; kz_1).$$

Distance dans un repère orthonormé

Théorème
En repère orthonormé, si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Exemple. $A(1; 0; 2)$ et $B(3; 4; -1)$: $AB = \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29}$.

Produit scalaire dans l'espace

Définition — Produit scalaire (3D)
Pour $\vec{u}, \vec{v}$ dans l'espace :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

En repère orthonormé, avec $\vec{u}(x_1; y_1; z_1)$ et $\vec{v}(x_2; y_2; z_2)$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Propriété
Les propriétés (symétrie, bilinéarité, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \| \vec{u}\|^2$, orthogonalité) s'étendent du plan à l'espace.

Exemple. $\vec{u}(1; 2; 3)$, $\vec{v}(4; -1; 2)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 - 2 + 6 = 8$.

Colinéarité / coplanarité par les coordonnées

Propriété
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi leurs coordonnées sont proportionnelles.
- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires ssi leur *déterminant* (vu en détail en SM) s'annule. Pratiquement : rechercher si l'un est combinaison linéaire des deux autres.

Orthogonalité

Deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul. Dans l'espace, l'orthogonalité est relative à la direction, pas à l'intersection.

Exemple. $\vec{u}(1;0;-1)$ et $\vec{v}(1;2;1)$: produit $1+0-1=0$. Orthogonaux.