Corrigés — Les limites

Chapitre 8

Solution 1.

1. $\lim = 4 - 4 = 0$.
2. $3x^2$ domine, $\lim = +\infty$.
3. $-2x^3$ domine ; $x \to -\infty$ donne $x^3 \to -\infty$, donc $-2x^3 \to +\infty$. $\lim = +\infty$.
4. $\lim = 0$.

Solution 2.

1. $(x-1)\frac{x+1}{x-1} \to 2$.
2. $(x-2)\frac{x+2}{x-2} \to 4$.
3. Conjuguée : $\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \to \frac{1}{2}$.
4. $(x-3)\frac{x+3}{(x-3)(x-2)} = \frac{x+3}{x-2} \to 6$.

Solution 3.

1. Factoriser x : $\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}} \to 2$.
2. x^2 au num, x au dénom : $x \to +\infty$, donc $\lim = +\infty$.
3. $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \to 0$ (le x^2 domine au dénom).

Solution 4.

1. Conjuguée : $\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \to 0$.
2. Conjuguée : $\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \to \frac{1}{2}$.
3. Numérateur $\to 0$, dénominateur $\to 1$, donc $\lim = 0$.

Solution 5.

1. $x \to 1^-$: $x - 1 \to 0^-$, $\frac{1}{x-1} \to -\infty$. $x \to 1^+$: $\to +\infty$. Pas de limite en 1.
2. $\frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$ (pour $x \neq 2$). $\lim_{x\to 2} = \frac{1}{4}$ (à droite et à gauche).

Solution 6.

1. Dominante : $2\frac{x^2}{x^2} = 2$. $\lim = 2$.
2. Asymptote horizontale $y = 2$ en $\pm\infty$.

Solution 7.

1. Division : $x^2 + 2x - 1 = (x-1)(x+3) + 2$. Donc $f(x) = x + 3 + \frac{2}{x-1}$.
2. $\frac{2}{x-1} \to 0$ à l'infini, donc $f(x) - (x+3) \to 0$. **Asymptote oblique $y = x + 3$.**

Solution 8.
$f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{x^2 + x} - x - \frac{1}{2} = \frac{(x^2+x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}} = -\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}} \to 0$. Donc asymptote.

Solution 9.
Résultat admis : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Démonstration géométrique via encadrement $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ pour x proche de 0, et gendarmes.

Solution 10.
1. $-1 \leq \cos x \leq 1$. Donc $|2\cos\frac{x}{x+1}| \leq \frac{2}{x+1} \to 0$. $\frac{3x}{x+1} \to 3$. Par somme : $\lim = 3$.
2. $|x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)| \leq x^2 \to 0$. Gendarmes : $\lim = 0$.