Corrigés — La rotation dans le plan

Chapitre 7

Solution 1.
Formule : $(x;y)\mapsto(-y;x)$. Image de $(2;3)$: $(-3;2)$.

Solution 2.
$x' = 1+(3-1)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-(2-0)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1+0-2 = -1.$ $y' = 0+(3-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+(2-0)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Image : $(-1;2)$.

Solution 3.
$x' = x\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-y\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{x}{2}-y\frac{\sqrt{3}}{2}$. $y' = x\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+y\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = x\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{y}{2}$.

- $A(2;0)\mapsto\left(1;\sqrt{3}\right)$.
- $B(0;2)\mapsto\left(-\sqrt{3};1\right)$.
- $C(1;1)\mapsto\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Solution 4.
1. $\frac{2\pi}{3}$ est l'angle entre deux sommets consécutifs d'un triangle équilatéral direct (vu du centre). Donc $A\mapsto B$.
2. $-\frac{2\pi}{3}$: $A\mapsto C$.

Solution 5.
$z'-i = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-i) = i(1+i-i) = i\times 1 = i$. Donc $z' = 2i$.

Solution 6.
Même centre : angles s'additionnent. $R_2\circ R_1 = R_{O,\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}} = R_{O,\frac{\pi}{2}}$.

Solution 7.
Si $A(x_1;y_1)$ et $B(x_2;y_2)$, alors leurs images A',B' satisfont $x'_A-x'_B = (x_A-x_B)\cos\theta-(y_A-y_B)\sin\theta$ et $y'_A-y'_B = (x_A-x_B)\sin\theta+(y_A-y_B)\cos\theta$. $A'B'^2 = \left(x'_A-x'_B\right)^2+\left(y'_A-y'_B\right)^2 = \left(x_A-x_B\right)^2(\cos^2+\sin^2)+\left(y_A-y_B\right)^2(\sin^2+\cos^2)$ (les termes croisés se compensent) $= AB^2$.

Solution 8.
Cercle C de centre $(2;0)$ rayon 3. $R_{O,\frac{\pi}{2}}$ envoie centre sur $(0;2)$. Cercle image : $x^2+(y-2)^2 = 9$.

Solution 9.
Point fixe : $z = e^{i\frac{\pi}{3}}z + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$, soit $\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)z = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc $z = 1$ (affixe du centre). L'équation s'écrit $z' - 1 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - 1)$, qui est la rotation de centre $(1; 0)$ et angle $\frac{\pi}{3}$.

Solution 10.
La rotation de centre A et angle $\frac{\pi}{4}$ envoie le carré $ABCD$ sur un nouveau carré $AB'C'D'$ de même côté mais incliné de $\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'original. A reste fixe.