

La rotation dans le plan

Chapitre 7

Définition géométrique

Définition — Rotation de centre Ω et d'angle ϑ

Soient Ω un point et θ un réel (mesure d'angle en radian). La *rotation* de centre Ω et d'angle θ , notée $R_{\Omega, \theta}$, est l'application du plan qui à un point M associe l'unique point $M' = R_{\Omega, \theta}(M)$ tel que :

- $\Omega M' = \Omega M$ (même distance au centre) ;
- l'angle orienté $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$.

Et $R_{\Omega, \theta}(\Omega) = \Omega$ (le centre est invariant).

Expression analytique (repère orthonormé)

Théorème

Soit Ω de coordonnées $(a; b)$ et $M(x; y)$. L'image $M'(x'; y')$ par la rotation $R_{\Omega, \theta}$ vérifie :

$$\begin{cases} x' = a + (x - a) \cos \theta - (y - b) \sin \theta \\ y' = b + (x - a) \sin \theta + (y - b) \cos \theta. \end{cases}$$

Si Ω est l'origine : $x' = x \cos \theta - y \sin \theta$ et $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$.

Démonstration. Esquisse. Poser $\overrightarrow{\Omega M} = (u; v)$ de norme $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ et d'angle α . L'image $\overrightarrow{\Omega M'}$ est de même norme mais d'angle $\alpha + \theta$, soit $(\rho \cos(\alpha + \theta), \rho \sin(\alpha + \theta))$. Développer avec les formules d'addition. ■

Exemple. Rotation de centre O et angle $\frac{\pi}{2}$: $M(x; y) \mapsto M'(-y; x)$. Rotation d'angle π : symétrie centrale, $(x; y) \mapsto (-x; -y)$.

Expression complexe

Identifier le plan euclidien à \mathbb{C} (le point $M(x; y)$ a pour *affixe* $z = x + iy$).

Théorème

La rotation de centre Ω (d'affixe ω) et d'angle θ envoie le point d'affixe z sur le point d'affixe z' vérifiant :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

Pour $\Omega = O$: $z' = e^{i\theta}z$.

Cette formulation est particulièrement commode pour composer des rotations ou démontrer des propriétés géométriques.

Propriétés

Propriété

La rotation $R_{\Omega, \theta}$:

1. est une **isométrie** (conserve les distances) ;
2. conserve les angles (non orientés) et les angles orientés ;
3. conserve l'alignement, le parallélisme, les milieux, les rapports ;
4. image d'une droite = droite ; image d'un cercle = cercle de même rayon ;
5. $R_{\Omega, 0} = \text{id}$; $R_{\Omega, \pi} =$ symétrie centrale de centre Ω .

Composition

Théorème

$R_{\Omega, \theta'} \circ R_{\Omega, \theta} = R_{\Omega, \theta + \theta'}$. Deux rotations de même centre commutent, et leur composée est une rotation d'angle la somme des angles.

Deux rotations de centres différents se composent en une rotation (si $\theta + \theta' \neq 2k\pi$) ou une translation (si $\theta + \theta' = 2k\pi$).

| *Démonstration.* Via l'expression complexe : $z \mapsto e^{i\theta}z$ puis $z \mapsto e^{i\theta'}z$ donne $z \mapsto e^{i(\theta+\theta')}z$. ■

Images de figures classiques

Propriété

Soit $R = R_{\Omega, \theta}$.

- Image d'un point : calcul direct (formule analytique).
- Image d'un segment $[AB]$: segment $[R(A)R(B)]$ (même longueur).
- Image d'un cercle $C(I, r)$: cercle $C(R(I), r)$.
- Image d'un triangle : triangle de mêmes longueurs de côtés et mêmes angles (donc isométrique).

Exemple. Rotation de centre O et angle $\frac{\pi}{3}$ appliquée au triangle équilatéral ABC centré en O : permute cycliquement les sommets selon la direction de rotation.