Les suites numériques

Chapitre 5

Définition et notation

Définition — Suite numérique
Une *suite numérique* est une fonction u définie sur $\mathbb{N}$ (ou un sous-ensemble de la forme $\{n_0, n_0 + 1, \ldots\}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note u_n l'image de n, appelée le *terme d'indice* n. La suite elle-même se note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement (u_n).

Exemple.
- $u_n = 2n + 1$: $u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 5, \ldots$ (nombres impairs).
- $v_n = \frac{1}{n}$ défini pour $n \geq 1$.
- w_n défini par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 2w_n$ (récurrence).

Modes de définition

Propriété
Une suite peut être définie :
- par son *expression explicite* $u_n = f(n)$;
- par une *récurrence* $u_{n+1} = f(u_n)$ avec un premier terme donné ;
- par une *description* (la n-ième décimale de π, etc.).

Sens de variation

Définition
Une suite (u_n) est :
- *croissante* si $\forall n, u_{n+1} \geq u_n$;
- *strictement croissante* si $\forall n, u_{n+1} > u_n$;
- *décroissante* / strictement décroissante : inégalités inversées ;
- *constante* si $\forall n, u_{n+1} = u_n$;
- *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Propriété — Méthodes standards
Pour étudier la monotonie :
1. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

2. Si les termes sont strictement positifs, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
3. Si $u_n = f(n)$ avec f définie sur $[0, +\infty[$ monotone : la suite a le même sens de variation.

Exemple. $u_n = n^2 - 3n$. $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 3(n+1) - n^2 + 3n = 2n + 1 - 3 = 2n - 2$. Positif pour $n \geq 1$.

- $u_0 = 0, u_1 = -2$: décroissante de u_0 à u_1.
- À partir de $n = 1$, croissante.

Suites arithmétiques

Définition
Une suite (u_n) est *arithmétique* de raison $r \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

Théorème — Expression explicite
Si (u_n) arithmétique de premier terme u_0 et de raison r :

$$u_n = u_0 + nr,$$

et plus généralement $u_n = u_p + (n-p)r$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Théorème — Somme des termes

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Plus généralement, pour une somme de k termes consécutifs : $\sum = k \times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$.

Démonstration. **Idée de la démonstration.** Écrire la somme dans les deux sens et additionner terme à terme : chaque paire somme à $u_0 + u_n$, et il y en a $n + 1$. ∎

Exemple. $1 + 2 + \ldots + 100 = 100 \times \frac{1+100}{2} = 5050$.

Suites géométriques

Définition
Une suite (u_n) est *géométrique* de raison $q \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n.$$

Théorème — Expression explicite
Si (u_n) géométrique de premier terme u_0 et de raison q :

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Théorème — Somme des termes ($\mathbf{q \neq 1}$)

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Si $q = 1$, tous les termes valent u_0, donc la somme vaut $(n+1)u_0$.

Exemple. Somme des $n+1$ premières puissances de 2 : $1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Majoration et minoration

Définition
Une suite (u_n) est :
- *majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n, u_n \leq M$;
- *minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n, u_n \geq m$;
- *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple.
- $(u_n) = ((-1)^n)$ est bornée : $-1 \leq u_n \leq 1$.
- $(u_n) = (n)$ est minorée par 0, non majorée.
- $(u_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ est bornée : $0 < u_n \leq 1$.

Propriété
Une suite géométrique $(u_n) = (u_0 q^n)$ avec $u_0 > 0$ et $q > 0$:
- Si $q > 1$: strictement croissante, non majorée.
- Si $0 < q < 1$: strictement décroissante, minorée par 0.
- Si $q = 1$: constante.

Étude pratique d'une suite

On combine :
- calcul explicite éventuel ;
- variation ;
- majoration / minoration ;
- premiers termes numériques ;
- interprétation (croissance démographique, intérêts, etc.).

Exemple. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n+3}{2}$. Calcul : $u_1 = 2, u_2 = \frac{5}{2}, u_3 = \frac{11}{4}, \ldots$

On conjecture $u_n \in [1, 3]$ et (u_n) croissante.

Monotonie : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+3}{2} - u_n = \frac{3-u_n}{2}$. Positif ssi $u_n < 3$.

Encadrement : si $u_n \in [1, 3]$, alors $u_{n+1} = \frac{u_n+3}{2}$ appartient à $[2, 3] \subset [1, 3]$. Comme $u_0 = 1 \in [1, 3]$, on a par une vérification immédiate que $u_n \in [1, 3]$ pour tout n.

D'où (u_n) est croissante et majorée par 3.