Corrigés — Produit scalaire approfondi

Chapitre 4

Solution 1.

1. $3 \times 2 + (-4) \times 1 = 2$.
2. $5 \times (-2) + 2 \times 5 = 0$. Vecteurs **orthogonaux**.
3. $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12 \times \frac{1}{2} = 6$.

Solution 2.

Vecteurs unitaires $\vec{u} = (\cos a; \sin a)$ et $\vec{v} = (\cos(-b); \sin(-b)) = (\cos b; -\sin b)$. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ (coordonnées). Mais aussi $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos((\vec{u}, \vec{v})) = \cos(a - (-b)) = \cos(a + b)$. D'où $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Solution 3.

$BC^2 = 49 + 25 - 70 \cos 60° = 74 - 35 = 39$. $BC = \sqrt{39} \approx 6\{,\}24$.

Solution 4.

Médiane : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$, soit $49 + AC^2 = 50 + 32$, donc $AC^2 = 33$, $AC = \sqrt{33}$.

Solution 5.

1. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$.
2. $x(x - 6) + y(y - 8) = 0$, soit $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$, ou $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ (cercle de centre $(3; 4)$, rayon 5).
3. Le triangle formé par $(0, 0), (4, 0), (0, 3)$ est rectangle en l'origine. L'hypoténuse $[(4, 0), (0, 3)]$ est un diamètre. Équation : $x(x - 4) + y(y - 3) = 0$, soit $x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0$.

Solution 6.

1. $(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 - 3 = 0$: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$. Centre $(2; -3)$, rayon 4.
2. $(x - 5)^2 - 25 + y^2 = 0$: $(x - 5)^2 + y^2 = 25$. Centre $(5; 0)$, rayon 5.

Solution 7.

1. $MA^2 - MB^2 = 4$. Avec $A(2; 0), B(-2; 0)$: $(x - 2)^2 + y^2 - (x + 2)^2 - y^2 = 4$, soit $-8x = 4$, $x = -\frac{1}{2}$. Droite verticale $x = -\frac{1}{2}$.
2. $\overrightarrow{MA}(2 - x, -y)$, $\overrightarrow{MB}(-2 - x, -y)$. Produit : $(2 - x)(-2 - x) + y^2 = -(4 - x^2) + y^2 = x^2 + y^2 - 4 = 0$, soit $x^2 + y^2 = 4$. Cercle centre O, rayon 2.
3. Même calcul : $x^2 + y^2 - 4 = -3$, soit $x^2 + y^2 = 1$. Cercle rayon 1.

Solution 8.

1. Al-Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB AC \cos \hat{A}$, soit $49 = 25 + 64 - 80 \cos \hat{A}$, donc $\cos \hat{A} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$.
2. $\hat{A} = 60°$.
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{A} = 5 \times 8 \times \frac{1}{2} = 20$.

Solution 9.

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$. $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$. Soustraire : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Solution 10.

$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = 4\overrightarrow{AI}^2$. Développer : $AB^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2 = 4AI^2$. () **D'autre part $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, donc $BC^2 = AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2$, d'où $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$. () Substituer () dans ()** : $2(AB^2 + AC^2) - BC^2 = 4AI^2$. Diviser par 2 : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$.