Le produit scalaire dans le plan (approfondi)

Chapitre 4

Rappels

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ d'un plan muni d'un repère orthonormé est le réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = xx' + yy'.$$

Vu en Tronc Commun. On l'approfondit ici dans trois directions : identités, applications trigonométriques, et lieux géométriques.

Propriétés algébriques (rappel consolidé)

Propriété

1. Symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
2. Bilinéarité : $(\vec{u} + \vec{w}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{v}$, et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
3. Carré scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
4. Orthogonalité : $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Identités de polarisation et applications trigonométriques

Théorème — Identités utiles

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$:

1. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
2. $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$.

Exemple. Formule d'addition via produit scalaire. Dans le plan orienté, soit $\vec{u}$ faisant un angle α avec l'horizontale, et $\vec{v}$ faisant un angle β. En écrivant leurs coordonnées $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ et $(\cos\beta, \sin\beta)$, le produit scalaire donne $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. Mais aussi $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\alpha - \beta)$. D'où la formule :

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Al-Kashi, médiane, Leibniz

Théorème — Al-Kashi (loi des cosinus)
Dans un triangle ABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \hat{A}.$$

Théorème — Médiane
Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. Alors

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}.$$

Théorème — Leibniz (cas n=2)
Soient A, B deux points et G le milieu de $[AB]$. Pour tout M :

$$MA^2 + MB^2 = 2MG^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

Équation cartésienne d'un cercle

Théorème — Cercle par centre et rayon
En repère orthonormé, le cercle de centre Ω de coordonnées $(a; b)$ et de rayon $r > 0$ a pour équation :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Théorème — Cercle défini par un diamètre
Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ (Thalès du cercle). En repère orthonormé :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0.$$

Régions et lieux géométriques

Propriété
L'ensemble des points M du plan tels que :
1. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ (pour k fixé) est un cercle, un point, ou $\emptyset$.
2. $MA^2 - MB^2 = k$ est une droite perpendiculaire à (AB).
3. $MA = MB$ (équivalent à $MA^2 - MB^2 = 0$) est la médiatrice de $[AB]$.

Démonstration. Pour le cas 2 : $MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) = \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \overrightarrow{BA}$. Cette expression vaut k : le premier facteur varie linéairement en M, le second est fixe. L'équation est linéaire en M, donc le lieu est une droite (ou un plan si $\overrightarrow{BA} = \vec{0}$, cas exclu). ■

Forme trigonométrique du produit scalaire

Dans un repère orthonormé, si les vecteurs sont de norme 1 (vecteurs unitaires) faisant respectivement des angles α et β avec l'axe (Ox) :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\alpha - \beta).$$

Plus généralement, si $\|\vec{u}\| = u$ et $\|\vec{v}\| = v$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = uv \cos(\alpha - \beta).$$