

Exercices — Produit scalaire approfondi

Chapitre 4

Exercice 1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en repère orthonormé pour :

1. $\vec{u}(3; -4)$, $\vec{v}(2; 1)$;
2. $\vec{u}(5; 2)$, $\vec{v}(-2; 5)$;
3. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$, angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 2. En utilisant le produit scalaire, démontrer la formule $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Indication : considérer les vecteurs unitaires d'angles a et $-b$.

Exercice 3. Dans le triangle ABC , on donne $AB = 7$, $AC = 5$, $\hat{A} = 60^\circ$. Calculer BC en utilisant Al-Kashi.

Exercice 4. ABC triangle, $BC = 8$, et I le milieu de $[BC]$. Sachant que $AI = 5$ et $AB = 7$, calculer AC .

Exercice 5. Donner l'équation cartésienne du cercle :

1. de centre $(3; -2)$ et rayon 4 ;
2. de diamètre $[AB]$ avec $A(0; 0)$ et $B(6; 8)$;
3. passant par $(0; 0)$, $(4; 0)$, $(0; 3)$.

Indication (c) : utiliser que ces points déterminent un triangle rectangle ; l'hypoténuse est un diamètre.

Exercice 6. Mettre sous forme canonique et déterminer centre et rayon :

1. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$;
2. $x^2 + y^2 - 10x = 0$.

Exercice 7. Soient $A(2; 0)$ et $B(-2; 0)$. Déterminer et représenter l'ensemble des M tels que :

1. $MA^2 - MB^2 = 4$;
2. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$;
3. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -3$.

Exercice 8. Dans un triangle ABC tel que $AB = 5$, $AC = 8$ et $BC = 7$:

1. Calculer $\cos \hat{A}$ via Al-Kashi.
2. En déduire \hat{A} (arrondi au degré).
3. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 9. Démontrer, pour tous vecteurs \vec{u}, \vec{v} :

$$4(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2.$$

Exercice 10. Démontrer le théorème de la médiane : pour tout triangle ABC et I milieu de $[BC]$,
 $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$.

Indication : partir de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$, et calculer le carré scalaire des deux membres.