Corrigés — Le barycentre dans le plan

Chapitre 3

Barycentre de deux points

Solution 1.

1. $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$. En évaluant depuis A : $2\times 0+\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AG}\right)(1)+2\times\left(\overrightarrow{AA}-\overrightarrow{AG}\right)=0$... plus simplement : $\overrightarrow{AG}=\left(\frac{2\times 0+1\times\overrightarrow{AB}}{2+1}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}$.

   G est aux $\frac{1}{3}$ de $[AB]$ en partant de A (car A est plus lourd, G le tire).
2. $\overrightarrow{AG'}=\frac{0+3\overrightarrow{AB}}{1+3}=\left(\frac{3}{4}\right)\overrightarrow{AB}$. $AG'=\left(\frac{3}{4}\right)AB$.

Solution 2.

$G=\left(\frac{3\times 1+1\times 5}{4};\frac{3\times 3+1\times(-1)}{4}\right)=\left(\frac{8}{4};\frac{8}{4}\right)=(2;2)$.

Trois points

Solution 3.

1. Par associativité : regrouper A, B en leur milieu I. Poids combiné 2. G_1 est barycentre de $(I,2),(C,2)$, soit le milieu de $[IC]$.
2. Somme $2-1+1=2\neq 0$. $\overrightarrow{AG_2}=\left(\frac{1}{2}\right)\left(0-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$.

Solution 4.

1. $G=\left(\frac{6}{3};\frac{6}{3}\right)=(2;2)$.
2. Somme $=6$. $H=\left(\frac{0+8+6}{6};\frac{0+0+18}{6}\right)=\left(\frac{14}{6};3\right)=\left(\frac{7}{3};3\right)$.

Homogénéité / associativité

Solution 5.

$(A,4),(B,6)$ et $(A,2),(B,3)$ sont proportionnels par facteur 2. Par homogénéité, ils ont le **même** barycentre.

Solution 6.
H = barycentre de $(A, 2), (B, 1)$: poids total 3. Par associativité, G (poids total $2+1+3 = 6$) = barycentre de $(H, 3), (C, 3)$. Donc G est le **milieu de $[HC]$**.

Alignement

Solution 7.
Pour $\overrightarrow{AI} = \left(\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AB}$: I est barycentre de $(A, 1), (B, 2)$. De même J : barycentre de $(A, 1), (C, 2)$. Et K = milieu de $[BC]$

barycentre de $(B, 1), (C, 1)$.

Pour aligner I, J, K, il faudrait une combinaison barycentrique reliant les trois ; en général ce n'est pas immédiat et ils ne sont pas alignés.

Cas $\left(\frac{1}{3}\right)$: I, J milieux des segments partant de A dans le triangle. La droite (IJ) est parallèle à (BC) (théorème des milieux), donc (IJ) et (BC) n'ont pas de point commun ; $K \in (BC)$ donc $K \notin (IJ)$ en général. **Non alignés**.

Lignes de niveau

Solution 8.
1. Somme des poids $= 2 - 1 + 1 = 2 \neq 0$. Le barycentre G de $(A, 2), (B, -1), (C, 1)$ est l'unique point vérifiant l'égalité. $\boldsymbol{M = G}$.
2. Somme $= 4$. Barycentre G' de $(A, 1), (B, 2), (C, 1)$. Unique point $M = G'$.

Synthèse

Solution 9.
1. Somme $= 2 + k$. $\overrightarrow{AG'} = \frac{1\times 0+1\times\overrightarrow{AB}+k\times\overrightarrow{AC}}{2+k} = \frac{\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}}{2+k}$.
2. $G' = G$: centre de gravité correspond à $k = 1$.
3. $G' \in (BC)$ ssi $\overrightarrow{BG'} = t\overrightarrow{BC}$ pour un $t \in \mathbb{R}$. En écrivant $\overrightarrow{BG'} = \overrightarrow{AG'} - \overrightarrow{AB}$ et en identifiant : les composantes en $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ doivent vérifier $\left(\frac{1}{2+k}\right) - 1 = -t$ et $\frac{k}{2+k} = t$. Donc $t = -\frac{1+k}{2+k}$ et $t = \frac{k}{2+k}$; égalité donne $-(1+k) = k$, soit $k = -\frac{1}{2}$. $\boldsymbol{k = -\frac{1}{2}}$.

Solution 10.
$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) + 2\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right) + 3\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right) = 6\overrightarrow{MG} + \left(\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC}\right)$.

Par définition de G, la parenthèse vaut $\vec{0}$. Donc la somme vaut $6\overrightarrow{MG}$.