Le barycentre dans le plan

Chapitre 3

Barycentre de deux points pondérés

Le barycentre généralise l'idée de milieu : c'est le « point d'équilibre » d'un système de points affectés de poids.

Définition — Barycentre de deux points pondérés
Soient A, B deux points du plan et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$. Le *barycentre* du système pondéré $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ est l'unique point G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Propriété — Caractérisation par un vecteur d'un point quelconque
Pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}}{\alpha + \beta}.$$

Démonstration. $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ s'écrit, avec Chasles, $\alpha\left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA}\right) + \beta\left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB}\right) = \vec{0}$, soit $(\alpha + \beta)\overrightarrow{GM} = -\left(\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}\right)$, d'où la formule. ∎

Exemple. Barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 1)$: $\overrightarrow{MG} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)$, c'est-à-dire le **milieu** de $[AB]$.

Barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$: $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}$ (plus proche de A, puisque A est plus « lourd »).

Propriété d'homogénéité

Théorème — Homogénéité
Le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta)$ est identique au barycentre de $(A, k\alpha), (B, k\beta)$ pour tout $k \in \mathbb{R}^*$ (à condition que $\alpha + \beta \neq 0$).

Démonstration. $k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} = k\left(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}\right) = \vec{0}$ si $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. ∎

Conséquence : on peut toujours se ramener à des poids de somme 1, ou simplifier les poids par un facteur commun.

Barycentre de trois points pondérés

Définition
Soient A, B, C trois points et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Le barycentre G est l'unique point vérifiant :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Pour tout M : $\overrightarrow{MG} = \left(\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\right)\left(\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}\right)$.

Exemple. Centre de gravité. Le *centre de gravité* d'un triangle ABC est le barycentre de $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$: $\overrightarrow{MG} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$. On retrouve la caractérisation vue en Tronc Commun.

Associativité

Théorème — Associativité
Soit G le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$, et supposons $\alpha + \beta \neq 0$. Si H est le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta)$, alors G est le barycentre de $(H, \alpha + \beta), (C, \gamma)$.

Intuition : on peut « regrouper » des points de même sous-système en un seul barycentre partiel, avec un poids égal à la somme.

Exemple. Barycentre G de $(A, 1), (B, 1), (C, 2)$. Regroupons A, B en leur milieu I (barycentre de $(A, 1), (B, 1)$ avec somme 2). Par associativité, G est le barycentre de $(I, 2), (C, 2)$, c'est-à-dire le milieu de $[IC]$.

Coordonnées d'un barycentre

Théorème
Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, si $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ et G est le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$ (avec $S = \alpha + \beta + \gamma \neq 0$) :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{S}, \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{S}.$$

Exemple. Centre de gravité de $A(0; 0), B(6; 0), C(0; 9)$: $G\left(\frac{0+6+0}{3}; \frac{0+0+9}{3}\right) = (2; 3)$.

Applications

Médianes et centre de gravité

Le centre de gravité divise chaque médiane dans le rapport $2:1$ à partir du sommet. Formellement : si A' est le milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AA'}$.

Alignement et barycentre

Propriété
Trois points P, Q, R sont alignés ssi il existe des réels α, β, γ non tous nuls tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $(P, \alpha), (Q, \beta), (R, \gamma)$ aient P, Q ou R comme barycentre.

En pratique, pour montrer que trois points sont alignés via barycentre, on les exprime les uns en fonction des autres avec les mêmes points.

Lignes de niveau

Propriété
L'ensemble des points M du plan tels que $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{u}$ (avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\vec{u}$ un vecteur fixe) est vide, un point, ou un cercle (selon le cas), grâce à la réduction au barycentre.

Exemple. Trouver l'ensemble des M tels que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Avec G = centre de gravité du triangle : le premier membre vaut $3\overrightarrow{MG}$. L'équation $3\overrightarrow{MG} = \vec{0}$ a pour unique solution $M = G$.