Exercices — Le barycentre dans le plan

Chapitre 3

Barycentre de deux points

Exercice 1. Soit $[AB]$ un segment.
1. Placer le barycentre G de $(A, 2)$ et $(B, 1)$. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
2. Placer $G' =$ barycentre de $(A, 1), (B, 3)$. Comparer AG' et AB.

Exercice 2. Soient $A(1; 3)$ et $B(5; -1)$. Calculer les coordonnées du barycentre de $(A, 3)$ et $(B, 1)$.

Barycentre de trois points

Exercice 3. Soit ABC un triangle. Construire :
1. $G_1 =$ barycentre de $(A, 1), (B, 1), (C, 2)$.
2. $G_2 =$ barycentre de $(A, 2), (B, -1), (C, 1)$.

Exercice 4. Dans un repère, $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(2; 6)$. Calculer les coordonnées :
1. du centre de gravité G de ABC ;
2. du barycentre H de $(A, 1), (B, 2), (C, 3)$.

Homogénéité et associativité

Exercice 5. Le barycentre de $(A, 4), (B, 6)$ est-il le même que celui de $(A, 2), (B, 3)$? Justifier.

Exercice 6. Soit G le barycentre de $(A, 2), (B, 1), (C, 3)$. Soit H le barycentre de $(A, 2), (B, 1)$. Exprimer G en fonction de H et de C (en utilisant l'associativité).

Alignement

Exercice 7. Dans un plan, A, B, C sont trois points non alignés. On pose :

$$\overrightarrow{AI} = \left(\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AJ} = \left(\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AC}.$$

Démontrer (via barycentre) que I, J et le milieu K de $[BC]$ ne sont pas alignés en général. Si en revanche on prend $\overrightarrow{AI} = \left(\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \left(\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AC}$, que peut-on conclure ?

Lignes de niveau

Exercice 8. Dans le plan, soient A, B, C trois points. Déterminer l'ensemble des points M tels que :
1. $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$;
2. $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Synthèse

Exercice 9. Soient A, B, C un triangle et G son centre de gravité. Soit G' le barycentre de $(A, 1), (B, 1), (C, k)$ avec $k \in \mathbb{R}$ tel que $2 + k \neq 0$.
1. Exprimer $\overrightarrow{AG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, k$.
2. Pour quelle valeur de k a-t-on $G' = G$?
3. Pour quelle valeur de k le point G' est-il sur (BC) ?

Exercice 10. Soient A, B, C trois points et G le barycentre de $(A, 1), (B, 2), (C, 3)$. Démontrer que pour tout M :

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG}.$$