

# Corrigés — Généralités sur les fonctions

## Chapitre 2

### Domaine de définition

---

#### Solution 1.

1. Polynôme :  $D_f = \mathbb{R}$ .
2. Quotient, exiger  $x^2 - 4 \neq 0$  :  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ .
3.  $2x - 6 \geq 0 \iff x \geq 3$ .  $D_f = [3, +\infty[$ .
4.  $x - 1 \geq 0$  et  $x - 3 \neq 0$  :  $D_f = [1, 3[ \cup ]3, +\infty[$ .
5.  $x^2 - 1 > 0 \iff x < -1$  ou  $x > 1$ .  $D_f = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ .

### Parité

---

#### Solution 2.

1.  $f(-x) = x^4 - 3x^2 + 5 = f(x)$ . **Paire.**
2.  $f(-x) = \frac{-x^3+x}{x^2+1} = -f(x)$ . **Impaire.**
3.  $f(-x) = |x| - x$ . Ni paire ni impaire ( $f(1) = 2, f(-1) = 0$ , ni + ni -).
4.  $f(-x) = \cos x + (-x)(-\sin x) = \cos x + x \sin x = f(x)$ . **Paire.**

#### Solution 3.

$\sin(3(x + 2\pi)) = \sin(3x + 6\pi) = \sin(3x)$  et  $\cos(2(x + 2\pi)) = \cos(2x + 4\pi) = \cos(2x)$ . Donc  $2\pi$  est période.

Ce n'est pas nécessairement la **plus petite**.  $\sin(3x)$  admet  $\frac{2\pi}{3}$  comme période ;  $\cos(2x)$  admet  $\pi$ . La période fondamentale de  $f$  est le plus petit  $T > 0$  commun, soit  $T = 2\pi$  (pgcd-like analysis — ici effectivement  $2\pi$ ).

### Monotonie

---

#### Solution 4.

1.  $f$  affine de coefficient  $2 > 0$  : **strict. croissante sur  $\mathbb{R}$ .**
2. Pour  $1 < x_1 < x_2$  :  $f(x_2) - f(x_1) = \frac{(x_2+1)(x_1-1) - (x_1+1)(x_2-1)}{(x_1-1)(x_2-1)} = -2 \frac{x_2-x_1}{(x_1-1)(x_2-1)}$ . Dénominateur  $> 0$ , numérateur  $< 0$ . **Strict. décroissante sur  $]1, +\infty[$ .**
3. **sqrt** strict. croissante et  $x + 2$  affine croissante, composée croissante.

4. Forme canonique :  $f(x) = -(x - 2)^2 + 4$ . Maximum 4 en  $x = 2$ . **Strict. croissante sur  $] -\infty, 2]$ .**

### Solution 5.

Soient  $x_1 < x_2$  dans  $I$ .  $f$  croissante donne  $f(x_1) \leq f(x_2)$ . Ces valeurs sont dans  $f(I)$ , et  $g$  décroissante donne  $g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$ , soit  $(g \circ f)(x_1) \geq (g \circ f)(x_2)$ . **Décroissante.**

## Composition

### Solution 6.

- $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 1$  ;  $(g \circ f)(x) = (2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$ .
- Différentes.
- $2x^2 - 1 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ . Solution :  $x = 1$ .

### Solution 7.

$f \circ g$  : existe ssi  $g(x) \in D_f = [0, +\infty[$ , soit  $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ . Domaine :  $] -\infty, 1]$ .

$g \circ f$  :  $f(x) \in D_g = \mathbb{R}$ , donc domaine =  $D_f = [0, +\infty[$ .

## Transformations

### Solution 8.

- $g$  : translation verticale +4.
- $h$  : translation horizontale +2.
- $k$  : translation horizontale  $-1$  puis symétrie par rapport à  $(Ox)$ .
- $\ell$  : dilatation verticale de rapport 3.

### Solution 9.

Ordre : translation horizontale +1 (courbe de  $\sqrt{x-1}$ ), puis dilatation verticale de rapport 2, puis translation verticale  $-3$ .

## Extrema

### Solution 10.

$f(x) = (x - 3)^2 + 1$ . Minimum 1 atteint en  $x = 3$ . Pas de maximum.

**Solution 11.**

$$f(x) - \frac{1}{2} = \frac{(x-1) - \frac{x^2+1}{2}}{x^2+1}$$

$$= \frac{2x-2-x^2-1}{2(x^2+1)} = -\frac{x^2-2x+3}{2(x^2+1)}.$$

Discriminant de  $x^2 - 2x + 3$  :  $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$ , donc le numérateur est strictement positif. D'où  $f(x) - \frac{1}{2} < 0$ , i.e.  $f(x) < \frac{1}{2}$ .

Hmm, en fait calculons plus proprement :  $f(x) - \frac{1}{2} = \frac{2(x-1) - (x^2+1)}{2(x^2+1)} = -\frac{x^2-2x+3}{2(x^2+1)}$ . Numérateur  $-(x-1)^2 - 2 < 0$ . Confirmé.

De même,  $f(x) + \frac{1}{2} = \frac{(x-1) + \frac{x^2+1}{2}}{x^2+1} = \frac{x^2+2x-1}{2(x^2+1)}$ , dont le signe dépend de  $x^2 + 2x - 1 = 0$ , racines  $x = -1 \pm \sqrt{2}$ . À vérifier plus finement pour déterminer l'encadrement serré.

**Résultat attendu** :  $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$  avec  $f(x) = \frac{1}{2}$  impossible et  $f(x) = -\frac{1}{2}$  pour des valeurs particulières. L'élève est encouragé à affiner les cas limites.

## Synthèse

**Solution 12.**

- $f(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$ . **Impaire.**
- $f(1) - f(0) = -2 - 0 = -2 < 0$  ;  $f(2) - f(1) = 2 - (-2) = 4 > 0$ . **Pas monotone** sur  $[0, 2]$ .
- Sur  $[-1, 1]$ ,  $f$  atteint son maximum et son minimum en des points critiques :  $f'(x) = 3x^2 - 3$  s'annule en  $x = \pm 1$ .  $f(-1) = 2, f(1) = -2, f(0) = 0$ .  $f([-1, 1]) = [-2, 2]$ .

**Solution 13.**

- $\frac{x+1}{x-2} = \frac{(x-2)+3}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$ .
- $x \mapsto \frac{3}{x-2}$  : décroissante sur  $] -\infty, 2[$  (car fonction inverse décroissante). Idem sur  $]2, +\infty[$ . Ajouter 1 conserve la monotonie. **Décroissante** sur chacun des deux intervalles.
- $f(x) - 1 = \frac{3}{x-2}$ . Signe = signe de  $x - 2$ .
  - $x > 2 \Rightarrow f(x) > 1$ .
  - $x < 2 \Rightarrow f(x) < 1$ .