Corrigés — Notions de logique

Chapitre 1

Propositions et connecteurs

Solution 1.

1. Proposition **vraie**.
2. Jugement subjectif, **pas une proposition** mathématique.
3. Proposition **vraie**.
4. Question, **pas une proposition**.

Solution 2.

1. $P \wedge Q$: P V et Q F donnent **F**.
2. $P \vee Q$: **V** (car P est V).
3. $\neg P$: **F**.
4. $P \Rightarrow Q$: V $\Rightarrow$ F est le cas faux, donc **F**.
5. $Q \Rightarrow P$: F $\Rightarrow$ V est **V** (implication à prémisse fausse).

Solution 3.

Table de $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

La dernière colonne vaut V ssi P et Q ont même valeur, exactement comme $P \Longleftrightarrow Q$.

Lois de De Morgan

Solution 4.

1. Négation de « $x > 0$ et $x < 5$ » : « $x \leq 0$ ou $x \geq 5$ ».
2. Négation de « pair ou divisible par 3 » : « impair et non divisible par 3 ».
3. Négation de « $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ est impair » : « $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ est pair ».

Quantificateurs

Solution 5.
1. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$. Vrai.
2. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 3$. Vrai ($x = \sqrt{3}$).
3. $\neg(\exists n \in \mathbb{N}, n$ pair et n impair$)$, ou de manière équivalente $\forall n \in \mathbb{N}, n$ pair $\Rightarrow n$ non impair. Vrai.

Solution 6.
1. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 < 2x$. (Faux en réalité puisque $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$.)
2. Négation : $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n + 41$ est premier.
3. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \neq 0$.

Modes de raisonnement

Solution 7.
Supposons n multiple de 3 : $n = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Alors $n^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$, donc n^2 est multiple de 3.

Solution 8.
Contraposée : « n pair $\Rightarrow n^2$ pair ». Si $n = 2k$ alors $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ pair. La contraposée est vraie donc l'implication de départ aussi.

Solution 9.
Par l'absurde, supposons $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ avec p, q premiers entre eux, $q \neq 0$. Alors $p^2 = 5q^2$, donc $5 \mid p^2$. Comme 5 est premier, $5 \mid p$. Posons $p = 5k$: $25k^2 = 5q^2$, soit $q^2 = 5k^2$, donc $5 \mid q$. Contradiction avec p et q premiers entre eux. Donc $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Solution 10.
Divisibilité par 2 : parmi trois entiers consécutifs, au moins un est pair ; donc $2 \mid n(n+1)(n+2)$.

Divisibilité par 3 : les restes modulo 3 des trois entiers $n, n+1, n+2$ sont trois valeurs consécutives modulo 3, donc couvrent tous les restes $0, 1, 2$. L'un d'eux est donc divisible par 3.

Comme 2 et 3 sont premiers entre eux et divisent tous deux le produit, $6 \mid n(n+1)(n+2)$.

Solution 11.
1. $n = 5$: $2^5 = 32$, $5^2 = 25$; OK. Essayons $n = 1$: $2 > 1$; $n = 2$: $4 > 4$ faux. Contre-exemple : $\boldsymbol{n = 2}$.

2. $x = 1\{,\}5$: $x > 1$ mais $x^2 = 2\{,\}25 < 2x = 3$. Contre-exemple : $\boldsymbol{x = 1\{,\}5}$ (tout $x \in]1, 2[$ convient).

Synthèse

Solution 12.

$\Rightarrow$: si $x^2 = 1$ alors $x^2 - 1 = 0$, soit $(x-1)(x+1) = 0$, donc $x = 1$ ou $x = -1$.

$\leq$: si $x = 1$ alors $x^2 = 1$; si $x = -1$ alors $x^2 = 1$. Dans les deux cas, $x^2 = 1$.

L'équivalence est démontrée.

Solution 13.

1. Table de $(\neg P) \vee Q$: V sauf quand $\neg P$ est F et Q est F, soit P V et Q F. Même table que $P \Rightarrow Q$.
2. Table de $P \wedge (\neg Q)$: V uniquement quand P est V et Q est F. Même table que $\neg(P \Rightarrow Q)$.