Notions de logique

Chapitre 1

Propositions et valeurs de vérité

Les mathématiques reposent sur un langage précis : les *propositions*. Comprendre comment on les combine et comment on les démontre est la base de tout le reste du programme.

Définition — Proposition mathématique
Une *proposition* est un énoncé dont on peut dire, sans ambiguïté, qu'il est vrai (V) ou qu'il est faux (F). Une proposition ne peut pas être « un peu vraie ». Sa *valeur de vérité* est V ou F, et jamais les deux.

Exemple.
- « 5 est un entier naturel » est une proposition vraie.
- « Tout entier pair est divisible par 4 » est une proposition fausse (contre-exemple : 6).
- « Que la paix soit avec toi » n'est pas une proposition : ce n'est ni vrai ni faux.

Connecteurs logiques

À partir de propositions P et Q, on en forme de nouvelles en les combinant avec des *connecteurs*.

Définition — Les cinq connecteurs
- **Négation** « non P », notée $\neg P$: vraie lorsque P est fausse, et réciproquement.
- **Conjonction** « P et Q », notée $P \wedge Q$: vraie lorsque P et Q sont simultanément vraies.
- **Disjonction** « P ou Q », notée $P \vee Q$: vraie dès que P ou Q est vraie (ou les deux).
- **Implication** « $P \Rightarrow Q$ » : fausse uniquement lorsque P est vraie et Q fausse.
- **Équivalence** « $P \iff Q$ » : vraie lorsque P et Q ont la même valeur de vérité.

Propriété — Tables de vérité
La valeur de vérité d'une composée se lit dans un tableau :

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Exemple. Soit P : « $5 \geq 3$ » et Q : « 5 est pair ». P est V, Q est F.
- $P \wedge Q$ est F.
- $P \vee Q$ est V.
- $P \Rightarrow Q$ est F (V implique F est le seul cas faux).
- $Q \Rightarrow P$ est V (F implique quoi que ce soit est toujours V).

Propriété — Lois de De Morgan
Pour toutes propositions P, Q :

$$\neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q), \quad \neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q).$$

Quantificateurs

Beaucoup d'énoncés mathématiques portent sur des objets « pour tout » ou « il existe ».

Définition — Quantificateur universel
Le quantificateur *universel* « pour tout », noté $\forall$, signifie « quel que soit ». L'énoncé « $\forall x \in E, P(x)$ » veut dire : tout élément x de l'ensemble E vérifie la propriété P.

Définition — Quantificateur existentiel
Le quantificateur *existentiel* « il existe », noté $\exists$, signifie « au moins un ». L'énoncé « $\exists x \in E, P(x)$ » veut dire : on peut trouver (au moins) un élément x de E tel que $P(x)$ soit vraie.

Exemple.
- $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geq 0$: vrai.
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$: vrai (par exemple $x = \sqrt{2}$).
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$: faux ($x = 0$ donne $x^2 = 0$).

Propriété — Négation des quantificateurs

$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \iff \exists x \in E, \neg P(x).$$

$$\neg(\exists x \in E, P(x)) \iff \forall x \in E, \neg P(x).$$

En mots : pour nier un « pour tout », on exhibe un contre-exemple ; pour nier un « il existe », on montre que la propriété échoue partout.

Exemple. Négation de « $\forall n \in \mathbb{N}, n$ est premier » : « $\exists n \in \mathbb{N}, n$ n'est pas premier ». Par exemple $n = 4$ convient.

Modes de raisonnement

Trois raisonnements couvrent la quasi-totalité des démonstrations au lycée.

Raisonnement direct

Pour démontrer $P \Rightarrow Q$: supposer P vraie, et en déduire Q par une chaîne d'implications.

Exemple. Si n est pair alors n^2 est pair.

Démonstration. Supposons n pair. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Alors $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Donc n^2 s'écrit comme deux fois un entier, il est pair.

Raisonnement par contraposée

Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, on démontre sa *contraposée* $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$. Les deux formulations sont logiquement équivalentes et l'une est parfois plus facile à prouver.

Exemple. Montrons : « si n^2 est pair alors n est pair ».

Par contraposée : supposons n impair. Alors $n = 2k + 1$ et $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, qui est impair. On vient de démontrer n impair $\Rightarrow n^2$ impair, c'est-à-dire la contraposée.

Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer P, on suppose $\neg P$ et on en déduit une contradiction (par exemple « $0 = 1$ »). Comme la supposition mène à une absurdité, elle est fausse, donc P est vraie.

Exemple. Démontrons : « $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel ».

Supposons par l'absurde $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers premiers entre eux et $q \neq 0$. Alors $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair, donc p l'est. Posant $p = 2k$, on obtient $q^2 = 2k^2$, donc q pair. Mais alors p et q sont tous deux pairs, ce qui contredit l'hypothèse qu'ils sont premiers entre eux. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Raisonnement par contre-exemple

Pour réfuter un énoncé universel « $\forall x \in E, P(x)$ », il suffit d'exhiber un seul $x_0 \in E$ tel que $P(x_0)$ soit fausse.

Exemple. L'énoncé « tout entier impair est premier » est faux. Contre-exemple : $9 = 3 \times 3$ est impair mais pas premier.

Raisonnement par disjonction de cas

Pour démontrer une propriété sur tous les éléments d'un ensemble E, on peut partitionner E en sous-cas disjoints et traiter chaque cas séparément.

Exemple. Montrons : pour tout entier n, $n(n + 1)$ est pair.

Disjonction sur la parité de n.

- Si n est pair, $n = 2k$, alors $n(n+1) = 2k(n+1)$ est pair.
- Si n est impair, $n+1$ est pair, donc $n(n+1)$ est pair.

Dans tous les cas, $n(n+1)$ est pair.

Équivalence et implication réciproque

L'implication $P \Rightarrow Q$ et sa réciproque $Q \Rightarrow P$ sont **deux propositions distinctes**. $P \iff Q$ signifie que les deux tiennent simultanément.

Exemple.

- « Si $x = 2$ alors $x^2 = 4$ » est vraie.
- Sa réciproque « si $x^2 = 4$ alors $x = 2$ » est fausse ($x = -2$ donne aussi $x^2 = 4$).

Donc l'équivalence « $x = 2 \iff x^2 = 4$ » est fausse.

Démontrer une équivalence demande deux implications : $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.