Exercices — Notions de logique

Chapitre 1

Propositions et connecteurs

Exercice 1. Parmi les énoncés suivants, préciser lesquels sont des propositions et, pour chacun, donner sa valeur de vérité :
1. $3 + 4 = 7$.
2. « Mathématique est une jolie discipline ».
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$.
4. Est-ce que 7 est premier ?

Exercice 2. Soient P : « $5 > 2$ » et Q : « 5 est pair ». Donner la valeur de vérité de :
1. $P \wedge Q$;
2. $P \vee Q$;
3. $\neg P$;
4. $P \Rightarrow Q$;
5. $Q \Rightarrow P$.

Exercice 3. Dresser la table de vérité de $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ et vérifier qu'elle coïncide avec celle de $P \iff Q$.

Lois de De Morgan

Exercice 4. Nier les propositions :
1. « $x > 0$ et $x < 5$ » ;
2. « Le nombre n est pair ou divisible par 3 » ;
3. « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 1$ est impair ».

Quantificateurs

Exercice 5. Écrire avec quantificateurs et donner la valeur de vérité :
1. Tout entier naturel est positif.
2. Il existe un réel dont le carré vaut 3.
3. Aucun entier n'est à la fois pair et impair.

Exercice 6. Donner la négation des propositions suivantes :
1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 2x$;
2. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + n + 41$ n'est pas premier ;
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$.

Modes de raisonnement

Exercice 7. Démontrer par un raisonnement direct : si n est un entier multiple de 3, alors n^2 l'est aussi.

Exercice 8. Démontrer par contraposée : si n^2 est impair, alors n est impair.

Exercice 9. Démontrer par l'absurde : $\sqrt{5}$ est irrationnel.

Indication : adapter la démonstration de $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ vue en cours.

Exercice 10. Démontrer par disjonction de cas : pour tout entier n, le produit $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.

Indication : traiter d'abord la divisibilité par 2, puis par 3.

Exercice 11. Démontrer par contre-exemple que les énoncés suivants sont faux :
1. $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n^2$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \Rightarrow x^2 > 2x$.

Synthèse

Exercice 12. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence :

$$x^2 = 1 \iff x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

(Démontrer les deux implications séparément.)

Exercice 13. Soient P et Q deux propositions. Démontrer à l'aide de tables de vérité :
1. $P \Rightarrow Q$ est équivalent à $(\neg P) \vee Q$;
2. $\neg(P \Rightarrow Q)$ est équivalent à $P \wedge (\neg Q)$.