

Exercices type contrôle — Notions de logique

Chapitre 1

Quantificateurs et négation

Exercice 1. Pour chaque proposition, donner sa valeur de vérité en justifiant, puis écrire sa négation :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 > 0$;
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1$.

Solution 1.

1. Vraie : $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 \leq 0$.
2. Fausse : pour tout réel x , $y = x - 1$ vérifie $y < x$; aucun réel n'est inférieur à tous les autres.
Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y < x$.
3. Fausse : pour $x = 2$, $x^2 + y^2 = 4 + y^2 \geq 4 > 1$ quel que soit y . Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 1$.

Table de vérité

Exercice 2. Soient P et Q deux propositions. Démontrer à l'aide d'une table de vérité que $((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)) \Leftrightarrow \neg P$.

Solution 2.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow \neg Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)$	$\neg P$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Les deux dernières colonnes coïncident : l'équivalence est démontrée. (Interprétation : si P entraîne à la fois Q et son contraire, c'est que P est fausse.)

Contraposée

Exercice 3. Soit x un réel. Démontrer par contraposée : « si x^2 est irrationnel, alors x est irrationnel ». La réciproque est-elle vraie ?

Solution 3.

Contraposée : « si x est rationnel, alors x^2 est rationnel ». Si $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, alors $x^2 = \frac{p^2}{q^2}$ avec $p^2 \in \mathbb{Z}$ et $q^2 \in \mathbb{N}^*$: x^2 est rationnel. La contraposée est vraie, donc l'implication aussi. La réciproque « si x est irrationnel alors x^2 est irrationnel » est fausse : $x = \sqrt{2}$ est irrationnel et $x^2 = 2$ est rationnel.

Raisonnement par l'absurde

Exercice 4.

1. Démontrer que $\sqrt{6}$ est irrationnel.
2. En déduire que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

Solution 4.

1. Supposons $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Alors $p^2 = 6q^2$ est pair, donc p est pair : $p = 2k$. Alors $4k^2 = 6q^2$, soit $2k^2 = 3q^2$: $3q^2$ est pair, donc q^2 puis q sont pairs. p et q seraient tous deux pairs : contradiction.
2. Si $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ était rationnel, $r^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ le serait aussi, et $\sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2}$ serait rationnel : contradiction avec la question 1.

Disjonction de cas et équivalence

Exercice 5.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n , le nombre $n(n^2 + 2)$ est divisible par 3.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence $x^2 + x = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } x = -1)$.

Solution 5.

1. Tout entier n s'écrit $3k$, $3k + 1$ ou $3k + 2$.
 - $n = 3k$: 3 divise n .
 - $n = 3k + 1$: $n^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 3 = 3(3k^2 + 2k + 1)$.
 - $n = 3k + 2$: $n^2 + 2 = 9k^2 + 12k + 6 = 3(3k^2 + 4k + 2)$.

Dans chaque cas l'un des facteurs est multiple de 3, donc le produit aussi.

2. $x^2 + x = x(x + 1)$ et un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul : $x^2 + x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x + 1 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -1$. Les deux implications sont contenues dans cette chaîne d'équivalences.