Dénombrement et probabilités

Chapitre 12

Principes du dénombrement

Propriété

- **Principe multiplicatif** : si une tâche se décompose en k étapes successives avec $n_1, n_2, ..., n_k$ choix, il y a $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$ issues possibles.
- **Principe additif** : si une tâche peut se réaliser de deux façons exclusives avec n_1, n_2 choix, le nombre total est $n_1 + n_2$.

Arrangements, permutations, combinaisons

Définition

Sur un ensemble à n éléments :

- *Permutations* de n éléments (tous ordonnés) : $n!$.
- *Arrangements* de k parmi n (ordonnés, sans répétition) : $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1)$.
- *Combinaisons* de k parmi n (non ordonnés, sans répétition) : $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Propriété — Propriétés des coefficients binomiaux

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie).
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (triangle de Pascal).
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ (cardinal de 2^E pour $|E| = n$).

Théorème — Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Espace probabilisé fini

Définition

Une *expérience aléatoire* a un ensemble d'issues possibles Ω (l'*univers*). Un *événement* est une partie $A \subseteq \Omega$. Une *probabilité* est une fonction $P : 2^\Omega \to [0,1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour A, B disjoints.

Propriété — Équiprobabilité
Si les issues sont équiprobables et $|\Omega| = n$:

$$P(A) = |A\frac{|}{|}\Omega| = \frac{\#\text{ cas favorables}}{\#\text{ cas possibles}}.$$

Probabilité conditionnelle

Définition
Soient A, B deux événements avec $P(B) > 0$. La *probabilité conditionnelle* de A sachant B est :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Théorème — Formule des probabilités totales
Soit $(B_i)_{1 \le i \le n}$ une partition de Ω avec $P(B_i) > 0$ pour tout i. Pour tout événement A :

$$P(A) = \sum_i P(A \mid B_i) P(B_i).$$

Théorème — Formule de Bayes
Si $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) P(A)}{P(B)}.$$

Indépendance

Définition
Deux événements A et B sont *indépendants* si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Équivalent, si $P(B) > 0$: $P(A \mid B) = P(A)$.

Variable aléatoire discrète

Définition
Une *variable aléatoire* X sur Ω est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Elle est *discrète* si ses valeurs forment un ensemble fini (ou dénombrable) $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Sa *loi* est la donnée des $P(X = x_i)$.

Définition — Espérance, variance

- Espérance : $E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$.
- Variance : $V(X) = E\big((X - E(X))^2\big) = \sum_i (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$. Formule pratique : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
- Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple. Lancer d'un dé équilibré. $X =$ valeur affichée. $E(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3\{,\}5$. $V(X) = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} - 3\{,\}5^2 = \frac{91}{6} - 12\{,\}25 \approx 2\{,\}92$.