

Géométrie dans l'espace

Chapitre 11

Produit scalaire dans l'espace (approfondissement)

Définition

Pour \vec{u}, \vec{v} dans l'espace : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$. En repère orthonormé :

$$\vec{u}(x_1, y_1, z_1) \cdot \vec{v}(x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Propriété

Symétrique, bilinéaire, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Orthogonalité : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Produit vectoriel

Définition

Le *produit vectoriel* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (aussi noté $\vec{u} \times \vec{v}$) est le vecteur :

- orthogonal à \vec{u} et à \vec{v} ;
- de norme $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$;
- direction donnée par la règle des trois doigts (orientation directe).

En repère orthonormé direct, $\vec{u}(x_1, y_1, z_1), \vec{v}(x_2, y_2, z_2)$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2).$$

Propriété

- **Antisymétrie** : $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$.
- Bilinearité.
- $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ ssi \vec{u}, \vec{v} colinéaires.
- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire du parallélogramme engendré.

Exemple. $\vec{u}(1, 2, 3), \vec{v}(4, 5, 6)$: $\vec{u} \wedge \vec{v} = (2 \times 6 - 3 \times 5, 3 \times 4 - 1 \times 6, 1 \times 5 - 2 \times 4) = (-3, 6, -3)$.

Équation cartésienne d'un plan

Théorème

Le plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ a pour équation :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0,$$

ou de manière équivalente $ax + by + cz + d = 0$.

Propriété — Plan défini par trois points

Un vecteur normal au plan (ABC) est $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ (non nul si les points sont non alignés).

Intersection droite-plan, plan-plan

Propriété

- Droite (D) de paramétrique, plan (P) d'équation cartésienne : substituer les expressions de x, y, z dans l'équation du plan et résoudre en t .
- Deux plans parallèles ssi leurs normaux sont colinéaires. Si sécants, leur intersection est une droite dont un vecteur directeur est $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$.

Équation d'une sphère

Théorème

Sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et rayon r : équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$. Forme développée : $x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$, correspondant à une sphère ssi $(\frac{\alpha}{2})^2 + (\frac{\beta}{2})^2 + (\frac{\gamma}{2})^2 - \delta > 0$.

Distances

Théorème

Distance du point $M(x_0, y_0, z_0)$ au plan $ax + by + cz + d = 0$:

$$d(M, P) = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d| \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Distance du point M à la droite (D) passant par A et de directeur \vec{u} :

$$d(M, D) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Volume du parallélépipède

Le volume du parallélépipède engendré par $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est $|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = |(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}|$ (produit mixte).