

Exercices — Équations différentielles

Chapitre 10

Exercice 1. Résoudre :

1. $y' = 2y$;
2. $y' = -3y$ avec $y(0) = 5$;
3. $y' + y = 0$ avec $y(1) = e$.

Exercice 2. Résoudre :

1. $y' = y + 2$;
2. $y' = -2y + 6$ avec $y(0) = 0$;
3. $y' + 3y = 12$ avec $y(0) = 2$.

Exercice 3. Résoudre :

1. $y'' + y = 0$;
2. $y'' + 9y = 0$ avec $y(0) = 3, y'(0) = 0$;
3. $y'' + 4y = 0$ avec $y(0) = 0, y'(0) = 2$.

Exercice 4. (Modèle de désintégration.) Un échantillon radioactif vérifie $N'(t) = -\lambda N(t)$ avec $N(0) = N_0$ et $\lambda > 0$.

1. Exprimer $N(t)$.
2. Définir la *demi-vie* T par $N(T) = \frac{N_0}{2}$. Exprimer T en fonction de λ .

Exercice 5. (Population.) $P'(t) = 0{,}03P(t)$ avec $P(0) = 1000$. Combien de temps pour doubler la population ?

Exercice 6. (Refroidissement.) $T'(t) = -0{,}05(T - 15)$ avec $T(0) = 95$. Calculer $T(20)$ minutes et la limite à long terme.

Exercice 7. Démontrer que si y_1, y_2 sont solutions de $y' = ay + b$, alors $y_1 - y_2$ est solution de l'équation homogène $z' = az$.

Exercice 8. Résoudre $y' - y = e^x$ (on admet que la solution particulière est $y_{p(x)} = xe^x$, et la solution générale $= y_p + Ce^x$).

Exercice 9. Résoudre $y'' + 2y' = 0$ (remarquer que $z = y'$ résout $z' + 2z = 0$).