

# Calcul intégral

## Chapitre 9

### Intégrale d'une fonction continue

---

#### Définition

Soient  $f$  continue sur  $[a, b]$  et  $F$  une primitive quelconque de  $f$  sur cet intervalle. L'*intégrale* de  $f$  sur  $[a, b]$  est :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

La valeur ne dépend pas du choix de la primitive (constantes se soustraient).

### Propriétés

---

#### Propriété

Pour  $f, g$  continues sur  $[a, b]$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  :

1. **Linéarité** :  $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ .
2. **Relation de Chasles** :  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$  pour tout  $c \in [a, b]$ .
3. **Positivité** : si  $f \geq 0$  sur  $[a, b]$  alors  $\int_a^b f \geq 0$ .
4. **Monotonie** : si  $f \leq g$  alors  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ .
5.  $\int_a^a f = 0$  ;  $\int_b^a f = -\int_a^b f$ .

### Théorème fondamental

---

#### Théorème

Soit  $f$  continue sur  $I$  contenant  $a$ . La fonction  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  est la primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ . En particulier  $F' = f$ .

## Intégration par parties (IPP)

### Théorème

Soient  $u, v$  de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ . Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

**Exemple.** Calculer  $I = \int_0^1 xe^x dx$ .  $u = x, v' = e^x : u' = 1, v = e^x$ .  $I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$ .

## Changement de variable (introduction)

En 2e Bac, on utilise surtout les formes reconnaissables :  $\int u' f(u) dx = F(u) + c$  où  $F$  est primitive de  $f$ .

**Exemple.**  $\int 2xe^{x^2} dx : u = x^2, u' = 2x$ . Primitive :  $e^{x^2} + c$ .

## Valeur moyenne

### Définition

La *valeur moyenne* de  $f$  sur  $[a, b]$  est :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

## Aire d'une surface

### Théorème

L'aire de la surface délimitée par  $C_f$  (avec  $f \geq 0$ ), l'axe  $(Ox)$  et les droites  $x = a$  et  $x = b$  vaut  $\int_a^b f(x) dx$  (unités d'aire). Si  $f$  change de signe, découper l'intervalle selon les zéros et sommer les valeurs absolues. L'aire entre deux courbes  $y = f(x)$  et  $y = g(x)$  (avec  $f \geq g$ ) sur  $[a, b]$  vaut  $\int_a^b (f - g) dx$ .

**Exemple.** Aire sous  $y = x^2$  de 0 à 1 :  $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ .

## Volume d'un solide de révolution (introduction)

---

### Propriété

Le volume du solide engendré par la rotation autour de  $(Ox)$  de la courbe  $y = f(x) \geq 0$  sur  $[a, b]$  est :

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

**Exemple.** Volume de la sphère de rayon  $R$  :  $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$  sur  $[-R, R]$ .  $V = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left[ R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R = \pi \left( 2R^3 - 2\frac{R^3}{3} \right) = \frac{4\pi R^3}{3}$ .