Corrigés — Nombres complexes (partie 2)

Chapitre 8

Solution 1.
1. $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
2. $|z| = 2$, $\arg = \frac{2\pi}{3}$. $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
3. $z = 3e^{i\pi}$.
4. $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Solution 2.
1. $2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$.
2. $\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i$.
3. $4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2i\sqrt{3}$.

Solution 3.
$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. $(1+i)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8 e^{i2\pi} = 16$.

Solution 4.
$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8} = \frac{\cos(3x)+3\cos x}{4}$.

Solution 5.
$8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$. Racines cubiques : $r = 2$, angles $\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ pour $k = 0, 1, 2$: $2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $2e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

Solution 6.
$1 + \omega + \omega^2 = 0$ (somme des racines 3-ièmes de l'unité). Vérifier : multiplier par $(1-\omega)$: $(1-\omega)(1+\omega+\omega^2) = 1 - \omega^3 = 0$.

Solution 7.
$16 = 16e^{i0}$. Racines 4-ièmes : $2e^{ik\frac{\pi}{2}}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$: $2, 2i, -2, -2i$.

Solution 8.
$z - 1 = (1+i)(z-i)$, soit $z - 1 = (1+i)z - (1+i)i = (1+i)z - i + 1$. $z - (1+i)z = 2 - i$, soit $-iz = 2 - i$, $z = \frac{2-i}{-i} = (2-i)\frac{i}{1} = 2i + 1 = 1 + 2i$.

Solution 9.
Rotation de centre A et angle $\frac{\pi}{3}$: $z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$. $z_B - z_A = 2 - 2i$. $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} +$

$i\frac{\sqrt{3}}{2}$. $(2-2i)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1+i\sqrt{3}-i+\sqrt{3} = \left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)$. $z_C = z_A + \left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(\sqrt{3}-1\right) = \left(2+\sqrt{3}\right)+i\sqrt{3}$.

Solution 10.
Racines 7-ièmes de l'unité : $1, \omega, \omega^2, ..., \omega^6$ avec $\omega = e^{2i\frac{\pi}{7}}$. Somme $= 0$. Parties imaginaires : $0 + \sin\left(2\frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(4\frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(6\frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(8\frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(10\frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(12\frac{\pi}{7}\right) = 0$. Or $\sin\left(8\frac{\pi}{7}\right) = -\sin\left(6\frac{\pi}{7}\right)$, etc. Après simplification par symétrie, on obtient le résultat demandé.