Nombres complexes (partie 2)

Chapitre 8

Forme trigonométrique

Définition
Tout complexe non nul z s'écrit de manière unique (modulo 2π) :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r = |z| > 0.$$

θ est un *argument* de z, noté $\arg(z)$ (défini modulo 2π).

Pour passer de $z = x + iy$ à (r, θ) : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$.

Exemple. $z = 1 + i$: $r = \sqrt{2}$, $\cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$. Donc $z = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$.

Forme exponentielle

Définition
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Tout complexe non nul s'écrit $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$, $\theta = \arg(z)$.

Théorème — Propriétés algébriques
- $e^{i\theta} \times e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$.
- $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
- $|e^{i\theta}| = 1$; $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
- $e^{i0} = 1$; $e^{i\pi} = -1$ (célèbre).

Théorème — Formule de Moivre
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Théorème — Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Utilité : linéariser des puissances de cos ou sin en utilisant les développements binomiaux de $\left(e^{i\theta} \pm e^{-i\theta}\right)^n$.

Racines n-ièmes d'un complexe

Théorème
Soit $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ avec $r_0 > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $z^n = z_0$ admet exactement n solutions, appelées *racines n-ièmes* de z_0 :

$$z_k = r_0^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Cas particulier $z_0 = 1$: *racines n-ièmes de l'unité* : $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ où $\omega = e^{2i\frac{\pi}{n}}$. Elles forment les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

Applications géométriques

Propriété — Rotation via l'exponentielle
La rotation de centre Ω (d'affixe ω) et d'angle θ envoie z sur z' avec :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).$$

Propriété — Similitude directe
La similitude directe de centre Ω, rapport $k > 0$ et angle θ vérifie :

$$z' - \omega = k e^{i\theta}(z - \omega).$$

Propriété — Interprétation de $(z - a)/(z - b)$
Pour A, B distincts d'affixes a, b et M d'affixe z :
- $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = M\frac{A}{M}B.$
- $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right)$ (modulo 2π).

Ces relations sont centrales pour démontrer l'alignement ($\arg = 0$ ou π) ou l'orthogonalité ($\arg = \pm\frac{\pi}{2}$) en géométrie complexe.

Exemple. Montrer que quatre points A, B, C, D (distincts) sont cocycliques ou alignés ssi $\frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} \in \mathbb{R}$ (« birapport réel »).