Corrigés — Fonctions exponentielles

Chapitre 7

Solution 1.
1. e^2.
2. e^{10}.
3. 7.
4. 5.

Solution 2.
1. $x = \ln 5$.
2. $e^{2x} = 3e^x \Longrightarrow e^x = 3 \Longrightarrow x = \ln 3$.
3. $X = e^x$, $X^2 - 5X + 4 = 0$: $X = 1$ ou 4. $x = 0$ ou $\ln 4$.
4. $e^x + \frac{1}{e^x} = 2 \Longrightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \Longrightarrow (e^x - 1)^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Solution 3.
1. $2e^{2x}$.
2. $e^x + xe^x = (1+x)e^x$.
3. $2xe^{x^2}$.
4. Quotient : $\frac{e^x(1+e^x) - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

Solution 4.
1. e^x domine x, $\lim = +\infty$.
2. $x^2 e^{-x} \to 0$ (croiss. comparée).
3. $2 \times \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} = 2 \times 1 = 2$.
4. $\lim x^n e^x = 0$ à $-\infty$. $= 0$.

Solution 5.
$f(x) = (x-1)e^x$. $f'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$. Signe : $-$ avant 0, $+$ après. Minimum $f(0) = -1$. $\lim_{-\infty} = 0$ (croiss. comparée), $\lim_{+\infty} = +\infty$. Asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$.

Solution 6.
$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. $\lim_{x\to 1^-} = -\infty$, $\lim_{x\to 1^+} = +\infty$ (asymptote verticale $x = 1$). $\lim_{x\to -\infty} = 0$ (asympt. horiz. $y = 0$). $\lim_{x\to +\infty} = +\infty$.

Solution 7.
$f(-x) = e^{\{-x^2\}} = f(x)$. **Paire.** $f'(x) = -2xe^{\{-x^2\}}$. Signe : $+$ pour $x < 0$, $-$ pour $x > 0$. Maximum $f(0) = 1$. $\lim_{\pm\infty} = 0$ (croiss. comparée).

Solution 8.
Poser $g(x) = e^x - 2x$. $g'(x) = e^x - 2$. $g'(x) = 0$ en $x = \ln 2$. $g \searrow$ sur $]-\infty, \ln 2]$, $\nearrow$ sur $[\ln 2, +\infty[$. $g(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 \approx 0\{,\}61 > 0$. Hmm — g minimum positif, donc $g > 0$ partout. **Pas de solution ?**

Réviser l'énoncé : pour avoir des solutions il faut que le minimum soit < 0. Ici $g(\ln 2) \approx 0.61 > 0$: en fait $e^x > 2x$ partout, pas de solution.

Peut-être que l'énoncé attendait $e^{\{-x\}} = 2x$ (différent). L'exercice mérite vérification ; l'élève doit bien vérifier les hypothèses.

Solution 9.
1. $f(-x) = \ln(1 + x^2) = f(x)$. **Paire**.
2. $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. Signe : $+$ pour $x > 0$, $-$ pour $x < 0$. Minimum $f(0) = 0$.