Fonctions exponentielles

Chapitre 7

Fonction exponentielle

Définition
La fonction *exponentielle*, notée exp ou e^x, est la fonction réciproque de ln sur $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y = e^x \iff x = \ln y$ (avec $y > 0$). Elle est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, +\infty[$. En particulier $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

Propriétés algébriques

Théorème
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:
- $e^x \times e^y = e^{x+y}$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$
- $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln y} = y$ pour $y > 0$.

Dérivée et variations

Propriété
- $(e^x)' = e^x$. L'exponentielle est sa propre dérivée.
- exp est strictement croissante ; $e^x > 0$ pour tout x.
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
- Pour u dérivable : $(e^u)' = u'e^u$.

Propriété — Croissances comparées
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ (l'exponentielle l'emporte).
- $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

Équations et inéquations

Propriété
- $e^a = e^b \iff a = b$.
- $e^a > e^b \iff a > b$.
- $e^a = k$ (pour $k > 0$) équivaut à $a = \ln k$; pas de solution si $k \leq 0$.

Exemple. Résoudre $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$. Poser $X = e^x > 0$: $X^2 - 3X + 2 = 0$, racines $X = 1$ ou $X = 2$. $e^x = 1 \implies x = 0$. $e^x = 2 \implies x = \ln 2$.

Fonctions puissances

Définition
Pour $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $a^\alpha = e^{\alpha \ln a}$. Cette définition prolonge celle des puissances entières et permet toutes les règles algébriques habituelles.

Propriété
- Fonction $x \mapsto x^\alpha$ $(x > 0)$: dérivée $\alpha x^{\alpha-1}$.
- Fonction $x \mapsto a^x$ $(a > 0)$: $a^x = e^{x \ln a}$, dérivée $(\ln a)a^x$.

Étude type

Exemple. $f(x) = xe^x$ sur $\mathbb{R}$.
- $D = \mathbb{R}$. $f'(x) = e^x(1 + x)$.
- Signe de f' : signe de $1 + x$, donc $-$ avant -1, $+$ après.
- $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (croissance comparée, forme $(-\infty) \times 0$).
- $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$.
- Minimum $f(-1) = -e^{\{-1\}} = -\frac{1}{e}$.
- Asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$.