Corrigés — Nombres complexes (partie 1)

Chapitre 6

Solution 1.

1. $z_1 + z_2 = 1 + 7i$.
2. $z_1 z_2 = (2+3i)(-1+4i) = -2 + 8i - 3i + 12i^2 = -14 + 5i$.
3. $\frac{z_1}{z_2} = (2+3i)\frac{-1-4i}{(-1+4i)(-1-4i)} = (2+3i)\frac{-1-4i}{17} = \frac{-2-8i-3i+12}{17} = \frac{10-11i}{17}$.
4. $|z_1| = \sqrt{13}, |z_2| = \sqrt{17}$.

Solution 2.

1. $(1+i)^2 = 2i$.
2. $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$.
3. $(2-i)(2+i) = 5$.
4. $\frac{1}{3-2i} = \frac{3+2i}{13}$.

Solution 3.

$z = 1 + 2i$. $z^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$. $z^3 = zz^2 = (1+2i)(-3+4i) = -3 + 4i - 6i - 8 = -11 - 2i$. $z\overline{z} = 1 + 4 = 5$. $z + \overline{z} = 2$. $z - \overline{z} = 4i$.

Solution 4.

1. $z^2 = -4 \iff z = \pm 2i$.
2. $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.
3. $\Delta = 4 - 20 = -16$. $z = 1 \pm 2i$.
4. $\Delta = 9 - 40 = -31$. $z = \frac{-3 \pm i\sqrt{31}}{4}$.

Solution 5.

1. Cercle de centre $A(1)$ et rayon 3.
2. Médiatrice de $[-i, i]$: axe réel $\mathfrak{I}(z) = 0$.
3. Droite verticale $x = 2$.
4. Demi-plan supérieur (axe réel inclus).

Solution 6.

1. Développer : $|z + z'|^2 = (z + z')\left(\overline{z + z'}\right) = z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'}$. De même pour $|z - z'|^2 = z\overline{z} - z\overline{z'} - z'\overline{z} + z'\overline{z'}$. Somme : $2\,|z|^2 + 2\,|z'|^2$.
2. $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$. $z = \overline{z} \iff iy = -iy \iff y = 0 \iff z \in \mathbb{R}$.

Solution 7.
Coefficients : $u+v=-1$, $uv=1$. $u^2+v^2=(u+v)^2-2uv=1-2=-1$. $u^3v+uv^3=uv(u^2+v^2)=1\times(-1)=-1$.

Solution 8.
$z=1$ ou $z^2+z+1=0$, soit $z=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Trois solutions : $1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

Solution 9.
$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=2\frac{i}{2}=i$. Donc $z=i$, $|z|=1$.

Solution 10.
$z^4=1$. Racines : ± 1 et $\pm i$ (quatre racines quatrièmes de l'unité). Vérif : $1^4=1, (-1)^4=1, i^4=1, (-i)^4=1$.