Mathématiques · Tronc Commun Scientifique

Nombres complexes (partie 1)

Chapitre 6

Construction et forme algébrique

Définition
L'ensemble $\mathbb{C}$ des *nombres complexes* contient $\mathbb{R}$ et un élément particulier i tel que $i^2 = -1$. Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique :

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

x est la *partie réelle* $\Re(z)$, y la *partie imaginaire* $\Im(z)$.

Propriété — Opérations
- $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
- $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.
- $\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ pour $z \neq 0$.

Conjugué

Définition
Le *conjugué* de $z = x + iy$ est $\overline{z} = x - iy$.

Propriété
- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
- $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
- $\overline{\frac{z}{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.
- $z + \overline{z} = 2\Re(z)$; $z - \overline{z} = 2i\Im(z)$.
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$; z imaginaire pur $\iff z = -\overline{z}$.

Module

Définition
Le *module* de $z = x + iy$ est $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. C'est un réel ≥ 0.

Propriété

- $|z|^2 = z\overline{z}$.
- $|zz'| = |z| \times |z'|$.
- $|\frac{z}{z'}| = |z|/|z'|$ $(z' \neq 0)$.
- $|z| = 0 \iff z = 0$.
- Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Plan complexe (Plan d'Argand)

On identifie $\mathbb{C}$ au plan euclidien : à $z = x + iy$ on associe le point $M(x; y)$. z est l'*affixe* de M.

- L'axe (Ox) est l'*axe réel* (points d'affixe réelle).
- L'axe (Oy) est l'*axe imaginaire*.
- $|z|$ = distance OM.
- Conjugaison = symétrie par rapport à l'axe réel.
- Addition = translation.

Exemple. $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = 1 - i$. Affixe de $M_1(3; 2)$ et $M_2(1; -1)$. $z_1 + z_2 = 4 + i$: point $(4; 1)$. $z_1 - z_2 = 2 + 3i$: vecteur $\overrightarrow{M_2M_1}$.

Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Théorème

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Si $\Delta > 0$: deux racines réelles $z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$: racine double $-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$: deux racines **complexes conjuguées** :

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple. $z^2 + 2z + 5 = 0$. $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$. $z = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$.

Racines d'un complexe quelconque

Le calcul des racines carrées (non simple dans $\mathbb{C}$) et des racines n-ièmes sera fait plus rigoureusement en partie 2 (forme trigonométrique, forme exponentielle).