

Exercices — Nombres complexes (partie 1)

Chapitre 6

Exercice 1. Soient $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = -1 + 4i$. Calculer :

1. $z_1 + z_2$;
2. $z_1 z_2$;
3. $\frac{z_1}{z_2}$;
4. $|z_1|$ et $|z_2|$.

Exercice 2. Donner la forme algébrique :

1. $(1 + i)^2$;
2. $(1 + i)^4$;
3. $(2 - i)(2 + i)$;
4. $\frac{1}{3 - 2i}$.

Exercice 3. Soit $z = 1 + 2i$. Calculer $z^2, z^3, z\bar{z}, z + \bar{z}, z - \bar{z}$.

Exercice 4. Résoudre dans \mathbb{C} :

1. $z^2 = -4$;
2. $z^2 + z + 1 = 0$;
3. $z^2 - 2z + 5 = 0$;
4. $2z^2 + 3z + 5 = 0$.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. $|z - 1| = 3$;
2. $|z - i| = |z + i|$;
3. $\Re(z) = 2$;
4. $\Im(z) \geq 0$.

Exercice 6. Démontrer :

1. Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$ (identité du parallélogramme).
2. $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$.

Exercice 7. Soit $f(z) = z^2 + z + 1$ et u, v les racines de $f(z) = 0$. Calculer $u + v, uv, u^2 + v^2, u^3v + uv^3$.

Exercice 8. Résoudre $(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$ dans \mathbb{C} et donner les affixes sous forme $x + iy$.

Exercice 9. Soit $z = \frac{1+i}{1-i}$. Mettre sous forme algébrique et calculer $|z|$.

Exercice 10. Montrer que l'équation $z^4 - 1 = 0$ a exactement quatre solutions dans \mathbb{C} : ± 1 et $\pm i$. Vérifier.