

Exercices — Fonctions logarithmiques

Chapitre 5

Exercice 1. Simplifier :

1. $\ln(8) - \ln(2)$;
2. $\ln(e^3)$;
3. $\ln(\sqrt{e})$;
4. $2\ln(3) + \ln(4) - \ln(9)$.

Exercice 2. Résoudre dans \mathbb{R} :

1. $\ln(x) = 3$;
2. $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = 0$;
3. $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$ (poser $X = \ln x$) ;
4. $\ln(x) < 1$.

Exercice 3. Calculer la dérivée :

1. $f(x) = \ln(2x + 1)$;
2. $f(x) = x^2 \ln x$;
3. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$;
4. $f(x) = \ln(\ln x)$ pour $x > 1$.

Exercice 4. Calculer les limites :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x)$;
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$;
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$;
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x}$.

Exercice 5. Étude complète de $f(x) = \ln(x) - x + 1$ sur $]0, +\infty[$.

1. Dérivée, variations, extremum.
2. En déduire l'inégalité $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

Exercice 6. Étude de $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$. Maximum ? Asymptotes ?

Exercice 7. Résoudre $2\ln(x + 1) = \ln(x + 3)$.

Exercice 8. Résoudre $\ln(x) + \ln(x - 2) \geq \ln(3)$.

Exercice 9. Soit $f(x) = x^2 - 2\ln x$ sur $]0, +\infty[$. Étudier ses variations.

Exercice 10. Soit $f(x) = \ln(1 + e^x)$ sur \mathbb{R} (admettre e^x).

1. Montrer $f(x) \geq x$.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$.
3. Conclure sur les asymptotes.