

Fonctions primitives

Chapitre 4

Définition

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Une fonction F définie sur I est une *primitive* de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Théorème — Existence et unicité à constante près

Si f est continue sur I , alors f admet une primitive sur I . Deux primitives diffèrent d'une constante : si F et G sont primitives, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) = F(x) + c$.

Primitives usuelles

Propriété

$f(x)$	Primitive $F(x)$
x^n ($n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$ (sur $]0, +\infty[$)	$\ln x$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
e^x	e^x

Règles de calcul

Propriété

Soient F primitive de f , G primitive de g , $k \in \mathbb{R}$.

- $F + G$ est primitive de $f + g$.
- kF est primitive de kf .
- Primitive de $u' \times u^n$: $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ ($n \neq -1$).

- Primitive de $\frac{u'}{u} : \ln|u|$ (si $u \neq 0$).
- Primitive de $u' \cos(u) : \sin(u)$; de $u' \sin(u) : -\cos u$.
- Primitive de $u' e^u : e^u$.

Exemple. Primitive de $f(x) = 2x(x^2 + 1)^3$: reconnaître $u'u^n$ avec $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$, $n = 3$. Primitive : $\frac{(x^2+1)^4}{4} + c$.

Primitive vérifiant une condition initiale

Théorème

Soit f continue sur I , $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Exemple. Trouver la primitive F de $f(x) = 3x^2$ telle que $F(1) = 5$. Primitives : $F(x) = x^3 + c$. $F(1) = 1 + c = 5$, donc $c = 4$. $F(x) = x^3 + 4$.