Suites numériques

Chapitre 3

Convergence et divergence

Définition — Suite convergente
Une suite (u_n) *converge* vers $\ell \in \mathbb{R}$, noté $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Si (u_n) ne converge pas, elle *diverge*.

Définition — Limite infinie
$\lim u_n = +\infty$ si : $\forall A > 0, \exists N, n \geq N \Longrightarrow u_n > A$. Idem pour $-\infty$.

Limites usuelles

Propriété

- $\lim \frac{1}{n} = 0$ (pour $n \to +\infty$).
- $\lim n^\alpha = +\infty$ pour $\alpha > 0$.
- $\lim q^n$:
  - $+\infty$ si $q > 1$;
  - 1 si $q = 1$;
  - 0 si $|q| < 1$;
  - n'existe pas si $q \leq -1$.

Opérations sur les limites de suites

Théorème
Si $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$ (finis) :

- $\lim(u_n + v_n) = \ell + \ell'$; $\lim(u_n v_n) = \ell\ell'$;
- $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\ell}{\ell'}$ si $\ell' \neq 0$.

Les règles s'étendent aux limites infinies, avec les mêmes formes indéterminées que pour les fonctions.

Théorème des gendarmes pour les suites

Théorème
Si $v_n \le u_n \le w_n$ à partir d'un certain rang, et $\lim v_n = \lim w_n = \ell$, alors $\lim u_n = \ell$.

Exemple. $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$: $-\frac{1}{n} \le u_n \le \frac{1}{n}$, gendarmes $\to 0$, donc $\lim u_n = 0$.

Convergence monotone

Théorème — Théorème fondamental
1. Toute suite **croissante majorée** converge.
2. Toute suite **décroissante minorée** converge.
3. Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$; toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Conséquence pratique : pour démontrer qu'une suite récurrente converge, prouver sa monotonie + son caractère borné.

Suites récurrentes

Soit (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est continue.

Propriété
Si (u_n) converge vers ℓ et f est continue en ℓ, alors ℓ est un *point fixe* de f : $f(\ell) = \ell$.

Exemple. $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Limite éventuelle ℓ vérifie $\ell = \sqrt{\ell + 2}$, soit $\ell^2 = \ell + 2$, soit $\ell = 2$ (ou -1, rejeté).

Monotonie : on vérifie par calcul que (u_n) est croissante. **Majoration :** $u_n \le 2$ se démontre (si $u_n \le 2$, alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \le \sqrt{4} = 2$). Donc (u_n) croissante majorée par 2, converge. Et $\ell = 2$.

Suites adjacentes

Définition
Deux suites (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* si :
- (u_n) est croissante ;
- (v_n) est décroissante ;
- $u_n \le v_n$ pour tout n (ou $v_n - u_n \to 0$).

Théorème
Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Exemple classique : les sommes partielles croissantes et décroissantes d'une série alternée bornent la même limite.