

# Dérivation et étude des fonctions

## Chapitre 2

### Dérivabilité

---

#### Définition

$f$  est dérivable en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe et est finie. La limite est  $f'(a)$ .

#### Propriété — Conséquence

Si  $f$  dérivable en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ . La réciproque est fautive (ex.  $f(x) = |x|$  en  $0$  : continue, non dérivable).

### Théorèmes fondamentaux

---

#### Théorème — Théorème de Rolle

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ , avec  $f(a) = f(b)$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

#### Théorème — Théorème des accroissements finis (TAF)

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ . Il existe  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

#### Propriété — Conséquences pratiques

1. Si  $f'(x) \geq 0$  sur  $I$ ,  $f$  est croissante.
2. Si  $f'(x) = 0$  sur  $I$  (intervalle),  $f$  est constante.
3. Si  $|f'(x)| \leq M$  sur  $I$ ,  $|f(y) - f(x)| \leq M |y - x|$  (inégalité des accroissements finis — utile pour majorer).

### Dérivabilité à gauche et à droite

---

#### Définition

Les dérivées à gauche et à droite :

$$f'_{g(a)} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'_{d(a)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

$f$  dérivable en  $a$  ssi  $f'_{g(a)} = f'_{d(a)}$  et égal à la dérivée.

**Exemple.**  $f(x) = |x|$  en  $0$  :  $f'_{g(0)} = -1$ ,  $f'_{d(0)} = 1$ . Non dérivable ; point anguleux.

## Dérivée d'une fonction composée (rappel)

$(g \circ u)'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$ . Cas particuliers :  $(u^n)' = nu^{n-1}u'$  ;  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$  ;  $(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$ .

## Étude complète d'une fonction

Plan (rappel 1BAC SE) :

1. Domaine.
2. Parité, périodicité.
3. Limites aux bornes.
4. Asymptotes.
5. Dérivée, signe, tableau de variations.
6. Extrema.
7. Points particuliers, tangentes.
8. Tracé.

En 2e Bac on ajoute :

- Étude de la *concavité* via la dérivée seconde  $f''$ .
- Détection des *points d'inflexion* (où  $f''$  change de signe).
- *Branches infinies* plus raffinées.

## Branches paraboliques

Quand  $f(x) \rightarrow \pm\infty$  en  $\pm\infty$  :

- Si  $\frac{f(x)}{x} \rightarrow a \neq 0$  et  $f(x) - ax \rightarrow b$  finie : asymptote oblique  $y = ax + b$ .
- Si  $\frac{f(x)}{x} \rightarrow a$  mais  $f(x) - ax \rightarrow \pm\infty$  : branche parabolique de direction  $y = ax$ .
- Si  $\frac{f(x)}{x} \rightarrow \pm\infty$  : branche parabolique verticale.
- Si  $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$  : branche parabolique horizontale.

**Exemple.**  $f(x) = x + \sqrt{x}$  en  $+\infty$ .  $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 1$ .  $f(x) - x = \sqrt{x} \rightarrow +\infty$ . Donc **branche parabolique de direction  $y = x$**  (la courbe monte « au-dessus » de la droite  $y = x$ ).

## Optimisation (problèmes de maximum/minimum)

Les extrema s'obtiennent :

- en annulant la dérivée dans l'intérieur d'un intervalle ;
- aux bornes de l'intervalle (si fermé) ;
- en des points où la fonction n'est pas dérivable.

**Exemple.** On veut construire un rectangle de périmètre  $P$  d'aire maximale. Posons côtés  $x$  et  $(\frac{P}{2} - x)$ . Aire  $S(x) = x(\frac{P}{2} - x)$  sur  $[0, \frac{P}{2}]$ .  $S'(x) = \frac{P}{2} - 2x$ , annule en  $x = \frac{P}{4}$ .  $S$  max en  $x = \frac{P}{4}$  (carré). Aire max =  $\frac{P^2}{16}$ .