

# Limites et continuité

## Chapitre 1

### Rappels et approfondissement des limites

---

Les limites ont été introduites en 1ère Bac ; on les reprend plus rigoureusement.

#### Définition — Limite en un point (version précisée)

Soient  $f$  définie sur un voisinage de  $a \in \mathbb{R}$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ .  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  signifie : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $|x - a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$ .

#### Définition — Limite en l'infini

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  signifie : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $A > 0$  tel que  $x > A \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$ .

### Théorème des gendarmes (encadrement)

---

#### Théorème — Théorème des gendarmes

Soient  $f, g, h$  trois fonctions et  $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Si, sur un voisinage de  $a$  (sauf peut-être en  $a$ ) :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .

**Exemple.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$  :  $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ , et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \pm \frac{1}{x} = 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ .

### Continuité

---

#### Définition

$f$  est *continue en  $a$*  si  $a \in D_f$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  si elle est continue en tout point de  $I$ .

#### Propriété

Toute fonction construite par somme, produit, quotient (hors zéro du dénominateur), composition de fonctions usuelles (polynomiales, rationnelles, racine, trigonométriques, exp, ln) est continue sur son domaine.

## Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

---

### Théorème — TVI

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$ . Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = k$ .

### Théorème — Corollaire — existence d'un zéro

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et  $f(a) \times f(b) < 0$ , alors  $f$  admet au moins une racine dans  $]a, b[$ . Si de plus  $f$  est strictement monotone, cette racine est unique.

**Exemple.**  $f(x) = x^3 + x - 1$ .  $f(0) = -1 < 0$ ,  $f(1) = 1 > 0$ .  $f$  est continue et strictement croissante (car  $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ ). Donc l'équation  $f(x) = 0$  a une unique solution dans  $]0, 1[$ .

## Fonctions continues sur un segment

---

### Théorème

Toute fonction continue sur un segment  $[a, b]$  est **bornée et atteint ses bornes** : il existe  $x_m, x_M \in [a, b]$  tels que  $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$  pour tout  $x \in [a, b]$ . Conséquence : l'image  $f([a, b])$  est un segment  $[m, M]$ .

## Composition et limites

---

### Théorème — Limite d'une composée

Si  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$  et  $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = \ell$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(u(x)) = \ell$ .

**Exemple.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x^2) = \cos(0) = 1$  (cos continue).

## Prolongement par continuité

---

Si  $f$  est définie sur un voisinage épointé de  $a$  et admet une limite finie  $\ell$  en  $a$ , on peut *prolonger par continuité* en posant  $\tilde{f}(a) = \ell$ .

**Exemple.**  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ . Prolongement :  $\tilde{f}(0) = 1$ , continue sur  $\mathbb{R}$ .