

Examen national — Mathématiques (sujet d'entraînement)

Session normale 2025

Durée : 3 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Barème : 3 + 3 + 3 + 11 points.

Suites numériques

Exercice 1 (3 points). Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{3}$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n > 1$.
3. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{1-u_n}{3}$ et en déduire le sens de variation de (u_n) .
4. On pose $v_n = u_n - 1$. Montrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
5. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n , et calculer $\lim u_n$.
6. Calculer $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ en fonction de n .

Nombres complexes

Exercice 2 (3 points). Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.
2. On pose $a = 1 + i$. Calculer $|a|$ et donner un argument de a .
3. Calculer a^2 et a^4 .
4. On considère les points A , B et C d'affixes respectives a , $\bar{a}$ et a^2 . Montrer que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O , et placer les points A , B , C .

Probabilités

Exercice 3 (3 points). Un sac contient cinq jetons indiscernables au toucher, numérotés de 1 à 5.

- On tire simultanément deux jetons du sac.
1. Calculer la probabilité de l'événement A : « les deux numéros sont pairs ».
2. Calculer la probabilité de l'événement B : « la somme des deux numéros est paire ».
3. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand des deux numéros tirés. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer $E(X)$.

Problème d'analyse

Exercice 4 (11 points). Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$, et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

Partie A.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.
3. Montrer que pour tout $x > 0$: $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$.
4. Dresser le tableau de variations de f .
5. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et en déduire le signe de $f(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Partie B.

1. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse e .
2. Tracer (T) et $(\mathcal{C})$.
3. Discuter graphiquement, suivant les valeurs du réel k , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

Partie C.

1. Montrer que la fonction $F : x \rightarrow \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.
2. Calculer $\int_1^e f(x) dx$.
3. En déduire, en cm^2 , l'aire du domaine délimité par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.