

Examen national — Corrigé (sujet d'entraînement)

Session normale 2025

Suites numériques

Solution 1.

- $u_1 = \frac{8+1}{3} = 3$ et $u_2 = \frac{6+1}{3} = \frac{7}{3}$.
- Initialisation** : $u_0 = 4 > 1$. **Hérédité** : si $u_n > 1$, alors $2u_n + 1 > 3$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{3} > 1$.
Conclusion : $u_n > 1$ pour tout n .
- $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n+1-3u_n}{3} = \frac{1-u_n}{3} < 0$ car $u_n > 1$: la suite est strictement décroissante.
- $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{2u_n+1-3}{3} = \frac{2(u_n-1)}{3} = \frac{2}{3}v_n$: (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 3$.
- $v_n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $u_n = 1 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Comme $0 < \frac{2}{3} < 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$ et $\lim u_n = 1$.
- $S_n = \sum_{k=0}^n (1 + v_k) = (n+1) + 3 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = (n+1) + 9\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$.

Nombres complexes

Solution 2.

- $\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$: $z = \frac{2 \pm 2i}{2}$, soit $S = \{1 + i, 1 - i\}$.
- $|a| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ et $a = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$: un argument de a est $\frac{\pi}{4}$.
- $a^2 = (1+i)^2 = 1+2i-1 = 2i$ et $a^4 = (2i)^2 = -4$.
- $OA = |a| = \sqrt{2} = |\bar{a}| = OB$: le triangle est isocèle en O . De plus $\arg(\bar{a}) = -\frac{\pi}{4}$, donc l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$: le triangle OAB est rectangle en O . $A(1, 1)$, $B(1, -1)$ et $C(0, 2)$ (affixe $2i$).

Probabilités

Solution 3.

- Il y a $\binom{5}{2} = 10$ tirages équiprobables. Les numéros pairs sont 2 et 4 : un seul tirage favorable, $P(A) = \frac{1}{10}$.
- La somme est paire si les deux numéros ont la même parité : deux pairs (1 tirage) ou deux impairs parmi $\{1, 3, 5\}$ ($\binom{3}{2} = 3$ tirages). $P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

3. X prend les valeurs 2, 3, 4, 5. Le plus grand numéro vaut k lorsque l'autre est l'un des $k - 1$ numéros inférieurs : $P(X = 2) = \frac{1}{10}$, $P(X = 3) = \frac{2}{10}$, $P(X = 4) = \frac{3}{10}$, $P(X = 5) = \frac{4}{10}$.
 $E(X) = \frac{2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 4}{10} = \frac{40}{10} = 4$.

Problème d'analyse

Solution 4.

Partie A.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x) = -\infty$ et $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$: l'axe des ordonnées est asymptote verticale.
- $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$; $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ et $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ (croissances comparées), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses est asymptote horizontale en $+\infty$.
- $f = \frac{u}{v}$ avec $u = 1 + \ln x$, $v = x$: $f'(x) = \frac{(\frac{1}{x})x - (1 + \ln x)}{x^2} = \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$.
- $f'(x)$ a le signe de $-\ln x$: f est croissante sur $]0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$, avec un maximum $f(1) = 1$.
- $f(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0 \iff x = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Comme $1 + \ln x$ est croissante et $x > 0$: $f(x) < 0$ sur $]0, \frac{1}{e}[$ et $f(x) > 0$ sur $]\frac{1}{e}, +\infty[$.

Partie B.

- $f(e) = \frac{2}{e}$ et $f'(e) = -\frac{1}{e^2}$: $(T) : y = -\frac{1}{e^2}(x - e) + \frac{2}{e}$, soit $y = -\frac{x}{e^2} + \frac{3}{e}$.
- Tracé : la courbe part de $-\infty$ près de l'axe des ordonnées, coupe l'axe des abscisses en $\frac{1}{e} \approx 0,37$, culmine en $(1, 1)$ puis décroît vers l'axe des abscisses.
- D'après le tableau de variations : si $k > 1$, aucune solution ; si $k = 1$, une solution ($x = 1$) ; si $0 < k < 1$, deux solutions (une dans $]\frac{1}{e}, 1[$, une dans $]1, +\infty[$) ; si $k \leq 0$, une seule solution (dans $]0, \frac{1}{e}[$), car sur $[1, +\infty[$ la fonction reste strictement positive.

Partie C.

- $F'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \times 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{1 + \ln x}{x} = f(x)$.
- $\int_1^e f(x) dx = F(e) - F(1) = (1 + \frac{1}{2}) - 0 = \frac{3}{2}$.
- Sur $[1, e]$, $f(x) > 0$: l'aire vaut $\frac{3}{2}$ unité d'aire, soit $\frac{3}{2} \times 4 = 6 \text{ cm}^2$.