

Examen national : Mathématiques

Session de rattrapage 2025 (épreuve officielle RS 24F)

Durée : 4 heures. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.

L'épreuve comporte cinq exercices indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat. Barème : 7,75 + 2,25 + 3,5 + 3 + 3,5 points. L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

Analyse

Exercice 1 (7.75 points). Partie I. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{x^2 \ln x}{x^2 + 1} \quad \text{si } x \in]0; +\infty[$$

Et soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Étudier la continuité de f à droite en 0. (0,25 pt)
 (b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. (0,5 pt)
 (c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. (0,75 pt)
2. Soit φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = x^2 + 1 + 2 \ln x$.
 (a) Dresser le tableau de variations de φ . (0,5 pt)
 (b) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β appartenant à l'intervalle $]\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}[$. (On donne $\ln 2 \simeq 0,7$ et $\ln 3 \simeq 1,1$.) (0,5 pt)
 (c) Montrer que : $f(\beta) = -\frac{\beta^2}{2}$. (0,25 pt)
3. (a) Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{x\varphi(x)}{(x^2+1)^2}$. (0,5 pt)
 (b) Donner le tableau de variations de f . (0,5 pt)
 (c) Montrer que $\frac{1}{\beta}$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ sur $]\beta; +\infty[$. (0,25 pt)
 (d) Montrer que la droite d'équation $y = \beta x - \frac{1}{2}$ est la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $\frac{1}{\beta}$. (0,5 pt)
4. Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On admet que la courbe $(\mathcal{C})$ possède deux points d'inflexion.) (0,5 pt)

Partie II. On pose $J =]\sqrt{3}; 2[$ et $\alpha = \frac{1}{\beta}$. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}}$.

1. (a) Étudier les variations de g . (0,25 pt)
 (b) Montrer que : $(\forall x \in J) ; \sqrt{3} < g(x) < 2$. (0,25 pt)
 (On donne $\sqrt{3} \simeq 1,73$, $e^{\frac{2}{3}} \simeq 1,95$ et $e^{\frac{5}{8}} \simeq 1,87$.)

2. (a) En utilisant le résultat de la question I.3.(c), montrer que : $g(\alpha) = \alpha$. (0,25 pt)
 (b) Montrer que : $(\forall x \in J) ; |g'(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$. (0,5 pt)
 (c) En déduire que : $(\forall x \in J) ; |g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x - \alpha|$. (0,5 pt)
3. On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 = \frac{7}{4} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = g(x_n)$$

- (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n \in J$. (0,25 pt)
 (b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |x_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|$. (0,5 pt)
 (c) En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α . (0,25 pt)

Analyse

Exercice 2 (2.25 points). On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par : $(\forall n \geq 2), u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
 (a) Montrer que pour tout entier $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ et pour tout réel $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a : $\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln(x) \leq \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$. (0,25 pt)
 (b) En déduire que : $\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\} ; \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$. (0,25 pt)
2. (a) Montrer que : $(\forall n \geq 2) ; \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right)$. (0,5 pt)
 (b) En déduire que : $(\forall n \geq 2) ; u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx \leq u_n - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$. (0,5 pt)
 (c) Montrer que : $(\forall n \geq 2) ; -1 + \frac{1}{n} \leq u_n \leq -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$. (0,5 pt)
 (d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,25 pt)

Nombres complexes

Exercice 3 (3.5 points). Soit $\theta \in [0, \pi[$.

Partie I. On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) d'inconnue z :

$$(E_\theta) : z^2 + (1-i)e^{i\theta}z - ie^{i2\theta} = 0$$

1. (a) Vérifier que : $(E_\theta) \iff (2z + (1-i)e^{i\theta})^2 = ((1+i)e^{i\theta})^2$. (0,25 pt)
 (b) En déduire les deux solutions z_1 et z_2 de l'équation (E_θ) avec $\text{Im}(z_1) \leq 0$. (0,5 pt)
2. (a) Montrer que : $\frac{z_1+1}{z_2+i} = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. (0,25 pt)
 (b) En déduire la forme exponentielle du nombre complexe : $\frac{z_1+iz_2}{z_2+i}$. (0,25 pt)

Partie II. Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = e^{i\theta}$, $b = (1+i)e^{i\theta}$ et $c = b - a$. Soient m un nombre réel de $]0; 1[$, R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et le point Q d'affixe $q = me^{i\theta}$.

1. (a) Déterminer l'affixe p du point P l'image du point Q par la rotation R . (0,25 pt)
 (b) Vérifier que : $R(A) = C$. (0,25 pt)
2. Soit H le point d'affixe $h = \frac{m}{m-i}e^{i\theta}$.
 (a) Montrer que : $\frac{p-a}{h} = \frac{m^2+1}{m}i$ et $\frac{h-a}{p-a} = \frac{1}{m^2+1}$. (0,5 pt)

- (b) En déduire que H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AP) . (0,25 pt)
 (c) Montrer que : $\frac{b-h}{q-h} = \frac{1}{m}i$. (0,5 pt)
 (d) En déduire que les droites (QH) et (HB) sont perpendiculaires. (0,25 pt)
 (e) Montrer que les points A, Q, H et B sont cocycliques. (0,25 pt)

Arithmétique

Exercice 4 (3 points). On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : y = \frac{a}{b}x - \frac{c}{d}$ où a, b, c et d sont des entiers naturels non nuls vérifiant : $a \wedge b = c \wedge d = 1$.

- On suppose que l'équation (E) admet une solution (x_0, y_0) .
 - Montrer que : d divise bc . (0,5 pt)
 - En déduire que : d divise b . (0,5 pt)
- On suppose que d divise b et on pose : $b = nd$ où n est un entier naturel non nul.
 - Montrer qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que : $dnu - av = 1$. (0,5 pt)
 - En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est

$$S = \{(-vcn + bk; -ucn + ak) / k \in \mathbb{Z}\}$$

(0,75 pt)

- Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(F) : y = \frac{3}{2975}x - \frac{2}{119}$. (On donne : $2975 = 119 \times 25$.) (0,75 pt)

Structures algébriques

Exercice 5 (3.5 points). On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif de zéro la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On munit l'ensemble $E = \{x + yi / x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$ par la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{Z}^4; \quad (x + yi) * (x' + y'i) = (x + (-1)^y x') + (y + y')i$$

Partie I.

- Vérifier que : $(1 - i) * (3 + 2i) = -2 + i$. (0,25 pt)
 - Montrer que la loi $*$ n'est pas commutative dans E . (0,25 pt)
- Montrer que la loi $*$ est associative dans E . (0,5 pt)
- Montrer que 0 est l'élément neutre pour la loi $*$ dans E . (0,25 pt)
- Vérifier que $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2; (x + yi) * ((-1)^{y+1}x - yi) = 0$. (0,25 pt)
 - Montrer que $(E, *)$ est un groupe non commutatif. (0,25 pt)

Partie II. Soient les deux ensembles $F = \{x + 2yi / x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$ et

$$G = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z} \right\}$$

- Montrer que F est un sous-groupe de $(E, *)$. (0,5 pt)
 - Montrer que la loi $*$ est commutative dans F . (0,25 pt)

2. Soit φ l'application définie de F vers $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; \varphi(x + 2yi) = M(x, y)$.
- (a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(F, *)$ vers $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$. (0,5 pt)
 - (b) Montrer que $\varphi(F) = G$. (0,25 pt)
 - (c) En déduire que $(G, \times)$ est un groupe commutatif. (0,25 pt)