

Examen national : Corrigé

Session de rattrapage 2025 (épreuve officielle RS 24F)

Analyse

Solution 1.

Partie I.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0$ (croissances comparées) et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$: f est continue à droite en 0.

(b) Pour $x > 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x \ln x}{x^2+1}$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$: f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$. Graphiquement, $(\mathcal{C})$ admet au point O une demi-tangente horizontale (portée par l'axe des abscisses).

(c) $f(x) = \ln x \times \frac{x^2}{x^2+1}$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Ensuite $\frac{f(x)}{x} = \frac{x \ln x}{x^2+1} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{x^2}{x^2+1}$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (croissances comparées), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Interprétation : $(\mathcal{C})$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.
- (a) φ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\varphi'(x) = 2x + \frac{2}{x} > 0$. Donc φ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Limites : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty$ (car $2 \ln x \rightarrow -\infty$ et $x^2 + 1 \rightarrow 1$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$. Tableau de variations : φ croît strictement de $-\infty$ (en 0^+) à $+\infty$ (en $+\infty$).

(b) φ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$: l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution β dans $]0; +\infty[$. De plus $\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + 1 + 2 \ln(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4} - 2 \ln 2 \simeq 1,25 - 1,4 = -0,15 < 0$ et $\varphi(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{3} + 1 + 2 \ln(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{4}{3} - \ln 3 \simeq 1,33 - 1,1 = 0,23 > 0$. Comme $\varphi(\frac{1}{2}) < 0 = \varphi(\beta) < \varphi(\frac{1}{\sqrt{3}})$ et que φ est strictement croissante, $\beta \in]\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}[$.

(c) $\varphi(\beta) = 0$ donne $2 \ln \beta = -(\beta^2 + 1)$, soit $\ln \beta = -\frac{\beta^2+1}{2}$. Donc

$$f(\beta) = \frac{\beta^2 \ln \beta}{\beta^2 + 1} = \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1} \times \left(-\frac{\beta^2 + 1}{2} \right) = -\frac{\beta^2}{2}.$$

- (a) Sur $]0; +\infty[$, $x \mapsto x^2 \ln x$ et $x \mapsto x^2 + 1$ sont dérivables et $x^2 + 1 \neq 0$, donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{(2x \ln x + x)(x^2 + 1) - x^2 \ln x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 \ln x + 2x \ln x + x^3 + x - 2x^3 \ln x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x(x^2 + 1 + 2 \ln x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x\varphi(x)}{(x^2 + 1)^2}.$$

(b) Pour $x > 0$, $f'(x)$ a le signe de $\varphi(x)$: $\varphi(x) < 0$ si $0 < x < \beta$ et $\varphi(x) > 0$ si $x > \beta$ (φ strictement croissante, $\varphi(\beta) = 0$). Donc f est strictement décroissante sur $[0; \beta]$ et strictement croissante sur $[\beta; +\infty[$. Tableau de variations : $f(0) = 0$, f décroît jusqu'à $f(\beta) = -\frac{\beta^2}{2}$ (minimum), puis croît vers $+\infty$.

(c) f est continue et strictement croissante sur $[\beta; +\infty[$, donc l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ y admet au plus une solution. Or $\frac{1}{\beta} > 1 > \beta$ (car $\beta < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$), donc $\frac{1}{\beta} \in [\beta; +\infty[$, et, avec $\ln\left(\frac{1}{\beta}\right) = -\ln \beta = \frac{\beta^2+1}{2}$:

$$f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{\frac{1}{\beta^2} \times \frac{\beta^2+1}{2}}{\frac{1}{\beta^2} + 1} = \frac{\frac{\beta^2+1}{2\beta^2}}{\frac{1+\beta^2}{\beta^2}} = \frac{1}{2}.$$

Donc $\frac{1}{\beta}$ est l'unique solution de $f(x) = \frac{1}{2}$ sur $] \beta; +\infty[$.

(d) La tangente en $\frac{1}{\beta}$ a pour équation $y = f'\left(\frac{1}{\beta}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right) + f\left(\frac{1}{\beta}\right)$. Calculons $\varphi\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta^2} + 1 - 2 \ln \beta = \frac{1}{\beta^2} + 1 + \beta^2 + 1 = \frac{1+\beta^2}{\beta^2} + (1 + \beta^2) = \frac{(1+\beta^2)^2}{\beta^2}$, et $\left(\frac{1}{\beta^2} + 1\right)^2 = \frac{(1+\beta^2)^2}{\beta^4}$. Donc

$$f'\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta} \times \frac{(1 + \beta^2)^2}{\beta^2} \times \frac{\beta^4}{(1 + \beta^2)^2} = \beta.$$

La tangente est $y = \beta\left(x - \frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{2} = \beta x - 1 + \frac{1}{2} = \beta x - \frac{1}{2}$.

4. [Figure : repère orthonormé. La courbe part de O avec une demi-tangente horizontale, descend jusqu'au minimum au point d'abscisse $\beta \approx 0,53$ et d'ordonnée $-\frac{\beta^2}{2} \approx -0,14$, repasse par le point $(1; 0)$ (car $f(1) = 0$), puis croît vers $+\infty$ avec une branche parabolique de direction (Ox) (la courbe s'aplatit par rapport à la première bissectrice). Elle passe par le point d'abscisse $\frac{1}{\beta} \approx 1,9$ et d'ordonnée $\frac{1}{2}$, où sa tangente est la droite $y = \beta x - \frac{1}{2}$. On admet qu'elle possède deux points d'inflexion.]

Partie II. Remarquons que $g(x) = \sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}} = e^{\frac{1+\frac{1}{x^2}}{2}} = e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}}$, et que $\beta \in]\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}[$ donne $\alpha = \frac{1}{\beta} \in]\sqrt{3}; 2[= J$.

- (a) g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $g'(x) = -\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}} = -\frac{g(x)}{x^3} < 0$. Donc g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
 (b) Soit $x \in J : \sqrt{3} < x < 2$, donc, g étant strictement décroissante, $g(2) < g(x) < g(\sqrt{3})$. Or $g(\sqrt{3}) = e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = e^{\frac{2}{3}} \simeq 1,95 < 2$ et $g(2) = e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}} = e^{\frac{5}{8}} \simeq 1,87 > 1,73 \simeq \sqrt{3}$. Donc $\sqrt{3} < g(x) < 2$.
- (a) D'après I.3.(c), $f(\alpha) = \frac{1}{2}$, soit $\frac{\alpha^2 \ln \alpha}{\alpha^2 + 1} = \frac{1}{2}$, d'où $2\alpha^2 \ln \alpha = \alpha^2 + 1$ et $\ln \alpha = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha^2}$. Donc $\alpha = e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha^2}} = g(\alpha)$.
 (b) Pour $x \in J : |g'(x)| = \frac{g(x)}{x^3}$ avec $g(x) < 2$ (question 1.(b)) et $x^3 > (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$. Donc $|g'(x)| < \frac{2}{3\sqrt{3}}$, et a fortiori $|g'(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$.
 (c) g est dérivable sur l'intervalle J , $|g'| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$ sur J , et $\alpha \in J$. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $x \in J : |g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x - \alpha|$, soit, puisque $g(\alpha) = \alpha : |g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x - \alpha|$.
- (a) **Initialisation** : $x_0 = \frac{7}{4} = 1,75$ et $\sqrt{3} \simeq 1,73 < 1,75 < 2$, donc $x_0 \in J$. **Hérédité** : si $x_n \in J$, alors $x_{n+1} = g(x_n) \in]\sqrt{3}; 2[= J$ d'après 1.(b). **Conclusion** : $x_n \in J$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 (b) Posons $q = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. **Initialisation** : $|x_0 - \alpha| \leq q^0|x_0 - \alpha|$ est vraie. **Hérédité** : supposons $|x_n - \alpha| \leq q^n|x_0 - \alpha|$. Comme $x_n \in J$, la question 2.(c) donne $|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - \alpha| \leq q|x_n - \alpha| \leq q^{n+1}|x_0 - \alpha|$. **Conclusion** : $|x_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n|x_0 - \alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 (c) $0 < \frac{2}{3\sqrt{3}} < 1$ (car $3\sqrt{3} > 3 > 2$), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n = 0$. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - \alpha| = 0$: la suite (x_n) converge vers α .

Analyse

Solution 2.

1. (a) Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$ et $x \in [\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}]$. La fonction $\ln$ est croissante sur $]0, +\infty[$ et $0 < \frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}$, donc $\ln(\frac{k}{n}) \leq \ln(x) \leq \ln(\frac{k+1}{n})$.
 (b) En intégrant l'encadrement (a) sur $[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}]$, intervalle de longueur $\frac{1}{n}$ (bornes croissantes) :

$$\frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

2. (a) En sommant les inégalités (b) pour k de 1 à $n-1$ et en utilisant la relation de Chasles (la réunion des intervalles $[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}]$ pour $k = 1, \dots, n-1$ est $[\frac{1}{n}; 1]$) :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right),$$

la dernière égalité par le changement d'indice $k \rightarrow k+1$.

(b) Le membre de gauche est u_n . Pour le membre de droite :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right) + \ln\left(\frac{n}{n}\right) - \ln\left(\frac{1}{n}\right) \right) = u_n + 0 - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc $u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx \leq u_n - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$.

(c) Une primitive de $\ln$ sur $]0, +\infty[$ est $x \mapsto x \ln x - x$, donc

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx = [x \ln x - x]_{\frac{1}{n}}^1 = (0 - 1) - \left(\frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right) = -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right).$$

L'inégalité de gauche de (b) donne $u_n \leq -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$; celle de droite donne $u_n \geq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx + \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -1 + \frac{1}{n}$. D'où $-1 + \frac{1}{n} \leq u_n \leq -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$.

(d) $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ et $-\frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ (croissances comparées). Les deux bornes de (c) tendent vers -1 , donc, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

Nombres complexes

Solution 3.

Partie I.

1. (a) Développons : $(2z + (1-i)e^{i\theta})^2 = 4z^2 + 4(1-i)e^{i\theta}z + (1-i)^2e^{2i\theta}$, avec $(1-i)^2 = -2i$; et $((1+i)e^{i\theta})^2 = (1+i)^2e^{2i\theta} = 2ie^{2i\theta}$. Donc

$$(2z + (1-i)e^{i\theta})^2 = ((1+i)e^{i\theta})^2 \iff 4z^2 + 4(1-i)e^{i\theta}z - 2ie^{2i\theta} - 2ie^{2i\theta} = 0 \iff 4(z^2 + (1-i)e^{i\theta}z - ie^{2i\theta}) = 0,$$

ce qui est exactement (E_θ) .

(b) D'après (a), $2z + (1-i)e^{i\theta} = (1+i)e^{i\theta}$ ou $2z + (1-i)e^{i\theta} = -(1+i)e^{i\theta}$, soit

$$z = \frac{(1+i) - (1-i)}{2} e^{i\theta} = ie^{i\theta} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-(1+i) - (1-i)}{2} e^{i\theta} = -e^{i\theta}.$$

$\text{Im}(-e^{i\theta}) = -\sin \theta \leq 0$ pour $\theta \in [0, \pi[$, donc $z_1 = -e^{i\theta}$ et $z_2 = ie^{i\theta}$. (Pour $\theta \in]0, \pi[$, $\text{Im}(z_1) = -\sin \theta < 0$; ce choix est celui qui rend les questions suivantes cohérentes.)

2. (a) $z_1 + 1 = 1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 + i = i(e^{i\theta} + 1) = ie^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}) = 2i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$, avec $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ car $\frac{\theta}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Donc

$$\frac{z_1 + 1}{z_2 + i} = \frac{-2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}{2i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}} = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

- (b) $iz_2 - 1 = iz_2 + i^2 = i(z_2 + i)$, donc

$$\frac{z_1 + iz_2}{z_2 + i} = \frac{z_1 + 1}{z_2 + i} + \frac{iz_2 - 1}{z_2 + i} = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + i = \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right).$$

Or $-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$, et $\frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} > 0$. Donc

$$\frac{z_1 + iz_2}{z_2 + i} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\frac{\theta + \pi}{2}}.$$

Partie II.

1. (a) R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$: $p = e^{i\frac{\pi}{2}}q = ime^{i\theta}$.
 (b) L'image de A par R a pour affixe $ia = ie^{i\theta}$. Or $c = b - a = (1 + i)e^{i\theta} - e^{i\theta} = ie^{i\theta}$. Donc $R(A) = C$.
 2. (a) $p - a = (im - 1)e^{i\theta}$ et $h = \frac{m}{m-i}e^{i\theta}$, donc

$$\frac{p - a}{h} = \frac{(im - 1)(m - i)}{m} = \frac{im^2 - i^2m - m + i}{m} = \frac{im^2 + i}{m} = \frac{m^2 + 1}{m}i.$$

Ensuite $h - a = \left(\frac{m}{m-i} - 1\right)e^{i\theta} = \frac{m-m+i}{m-i}e^{i\theta} = \frac{i}{m-i}e^{i\theta}$, donc

$$\frac{h - a}{p - a} = \frac{i}{(m - i)(im - 1)} = \frac{i}{i(m^2 + 1)} = \frac{1}{m^2 + 1},$$

en utilisant $(m - i)(im - 1) = i(m^2 + 1)$ (calcul ci-dessus).

- (b) $\frac{h-a}{p-a}$ est un réel, donc $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont colinéaires : $H \in (AP)$. De plus $\frac{p-a}{h-a}$ est un imaginaire pur non nul, donc $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{AP}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$: $(OH) \perp (AP)$. Ainsi H est le point de (AP) tel que $(OH) \perp (AP)$: H est le projeté orthogonal de O sur la droite (AP) .
 (c) $b - h = \left((1 + i) - \frac{m}{m-i}\right)e^{i\theta} = \frac{(1+i)(m-i)-m}{m-i}e^{i\theta} = \frac{m-i+im+1-m}{m-i}e^{i\theta} = \frac{1-i+im}{m-i}e^{i\theta}$, et $q - h = \left(m - \frac{m}{m-i}\right)e^{i\theta} = \frac{m(m-i)-m}{m-i}e^{i\theta} = \frac{m(m-1-i)}{m-i}e^{i\theta}$. Donc

$$\frac{b - h}{q - h} = \frac{1 - i + im}{m(m - 1 - i)}.$$

Or $i(m - 1 - i) = im - i - i^2 = 1 - i + im$, donc $\frac{b-h}{q-h} = \frac{i(m-1-i)}{m(m-1-i)} = \frac{1}{m}i$.

- (d) $\frac{b-h}{q-h}$ est un imaginaire pur non nul, donc $(\overrightarrow{HQ}, \overrightarrow{HB}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$: les droites (QH) et (HB) sont perpendiculaires.

(e) D'après (d), le triangle QHB est rectangle en H . D'autre part $q = ma$ avec m réel ($m \neq 1$), donc $Q \in (OA)$ et $Q \neq A$; et $\frac{b-a}{a-0} = \frac{c}{a} = i$ est un imaginaire pur, donc $(AB) \perp (OA)$, c'est-à-dire $(AB) \perp (AQ)$: le triangle QAB est rectangle en A . Les points H et A voient le segment $[QB]$ sous un angle droit, donc ils appartiennent au cercle de diamètre $[QB]$. Par conséquent A, Q, H et B sont cocycliques.

Arithmétique

Solution 4.

- (a) (x_0, y_0) est solution de (E) : $y_0 = \frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{d}$. En multipliant par bd : $bdy_0 = adx_0 - bc$, soit $bc = adx_0 - bdy_0 = d(ax_0 - by_0)$ avec $ax_0 - by_0 \in \mathbb{Z}$. Donc d divise bc .
(b) d divise bc et $d \wedge c = 1$; d'après le théorème de Gauss, d divise b .
- (a) $a \wedge b = 1$ et $b = dn$, donc $a \wedge (dn) = 1$. D'après le théorème de Bézout, il existe $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $dnu_0 - av_0 = 1$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le couple $(u_0 + ak, v_0 + dnk)$ vérifie encore $dn(u_0 + ak) - a(v_0 + dnk) = dnu_0 - av_0 = 1$. Comme $a > 0$ et $dn > 0$, en choisissant k assez grand (par exemple $k = |u_0| + |v_0|$), on obtient $u = u_0 + ak \geq 0$ et $v = v_0 + dnk \geq 0$. Donc il existe $(u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $dnu - av = 1$.
(b) Avec $b = nd$: (x, y) est solution de (E) si et seulement si $bdy = adx - bc$, soit $nd^2y = adx - ndc$, soit (en divisant par $d \neq 0$)

$$ax - ndy = nc.$$

Solution particulière : en multipliant $dnu - av = 1$ par $-nc$: $a(-vcn) - nd(-ucn) = nc$, donc $(x_0, y_0) = (-vcn, -ucn)$ est solution. Soit (x, y) une solution quelconque ; par différence : $a(x - x_0) = nd(y - y_0) = b(y - y_0)$. Comme b divise $a(x - x_0)$ et $a \wedge b = 1$, le théorème de Gauss donne $b \mid (x - x_0)$: $x = x_0 + bk$ avec $k \in \mathbb{Z}$, puis $abk = b(y - y_0)$ donne $y = y_0 + ak$. Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $a(x_0 + bk) - nd(y_0 + ak) = ax_0 - ndy_0 + abk - bak = nc$ (car $nd = b$). Donc l'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \{(-vcn + bk; -ucn + ak) / k \in \mathbb{Z}\}.$$

- Ici $a = 3$, $b = 2975$, $c = 2$, $d = 119$. On a $a \wedge b = 1$ (car $2975 = 3 \times 991 + 2$ n'est pas divisible par 3, et 3 est premier) et $c \wedge d = 1$ (119 est impair). De plus $d = 119$ divise $b = 2975 = 119 \times 25$: $n = 25$. Cherchons $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ tel que $dnu - av = 1$, soit $2975u - 3v = 1$: comme $2975 \equiv 2[3]$, $u = 2$ donne $5950 = 3 \times 1983 + 1$, donc $(u, v) = (2, 1983)$ convient ($2975 \times 2 - 3 \times 1983 = 5950 - 5949 = 1$). D'après la question 2.(b), les solutions de (F) sont les couples $(-vcn + bk; -ucn + ak) = (-1983 \times 2 \times 25 + 2975k; -2 \times 2 \times 25 + 3k) = (-99150 + 2975k; -100 + 3k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Comme $-99150 = 2975 \times (-34) + 2000$ et $-100 = 3 \times (-34) + 2$, en posant $k' = k - 34$ on obtient la forme réduite :

$$S = \{(2000 + 2975k; 2 + 3k) / k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\text{Vérification : } \frac{3}{2975} \times 2000 - \frac{2}{119} = \frac{240}{119} - \frac{2}{119} = \frac{238}{119} = 2.$$

Structures algébriques

Solution 5.

Partie I.

- (a) Avec $x = 1$, $y = -1$, $x' = 3$, $y' = 2$: $(1 - i) * (3 + 2i) = (1 + (-1)^{-1} \times 3) + (-1 + 2)i = (1 - 3) + i = -2 + i$.
(b) $(3 + 2i) * (1 - i) = (3 + (-1)^2 \times 1) + (2 - 1)i = 4 + i$. Comme $(1 - i) * (3 + 2i) = -2 + i \neq 4 + i = (3 + 2i) * (1 - i)$, la loi $*$ n'est pas commutative dans E .
- Soient $z = x + yi$, $z' = x' + y'i$, $z'' = x'' + y''i$ dans E .

$$(z * z') * z'' = ((x + (-1)^y x') + (y + y')i) * (x'' + y''i) = (x + (-1)^y x' + (-1)^{y+y'} x'') + (y + y' + y'')i.$$

$$z * (z' * z'') = (x + yi) * ((x' + (-1)^{y'} x'') + (y' + y'')i) = (x + (-1)^y (x' + (-1)^{y'} x'')) + (y + y' + y'')i,$$

et $(-1)^y (-1)^{y'} = (-1)^{y+y'}$. Les deux résultats sont égaux : $*$ est associative dans E .

3. $0 = 0 + 0i \in E$. Pour tout $x + yi \in E$: $(x + yi) * 0 = (x + (-1)^y \times 0) + (y + 0)i = x + yi$ et $0 * (x + yi) = (0 + (-1)^0 x) + (0 + y)i = x + yi$. Donc 0 est l'élément neutre de $*$ dans E .

4. (a) $(x + yi) * ((-1)^{y+1} x - yi) = (x + (-1)^y (-1)^{y+1} x) + (y - y)i = (x + (-1)^{2y+1} x) + 0i = x - x = 0$.

(b) La loi $*$ est interne dans E (car $x + (-1)^y x' \in \mathbb{Z}$ et $y + y' \in \mathbb{Z}$), associative (question 2), d'élément neutre 0 (question 3). Tout $z = x + yi \in E$ admet pour symétrique $z' = (-1)^{y+1} x - yi \in E$: $z * z' = 0$ d'après (a), et $z' * z = ((-1)^{y+1} x + (-1)^{-y} x) + (-y + y)i = ((-1)^{y+1} + (-1)^y) x = 0$. Donc $(E, *)$ est un groupe, non commutatif d'après 1.(b).

Partie II.

1. (a) $F \subset E$ et $0 = 0 + 2 \times 0i \in F$. Soient $z = x + 2yi$ et $z' = x' + 2y'i$ dans F . Le symétrique de z' est $(-1)^{2y'+1} x' - 2y'i = -x' - 2y'i$, et

$$z * (-x' - 2y'i) = (x + (-1)^{2y} (-x')) + (2y - 2y')i = (x - x') + 2(y - y')i \in F.$$

Donc F est un sous-groupe de $(E, *)$.

(b) Pour $z = x + 2yi$ et $z' = x' + 2y'i$ dans F : $(-1)^{2y} = 1$, donc $z * z' = (x + x') + 2(y + y')i$, expression symétrique en (x, y) et (x', y') ; ainsi $z * z' = z' * z$: la loi $*$ est commutative dans F .

2. (a) Pour $(x, y), (x', y') \in \mathbb{Z}^2$:

$$M(x, y) \times M(x', y') = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x + x' & y + y' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(x + x', y + y').$$

Donc, avec 1.(b) : $\varphi((x + 2yi) * (x' + 2y'i)) = \varphi((x + x') + 2(y + y')i) = M(x + x', y + y') = M(x, y) \times M(x', y') = \varphi(x + 2yi) \times \varphi(x' + 2y'i)$. φ est un homomorphisme de $(F, *)$ vers $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

(b) $\varphi(F) = \{\varphi(x + 2yi) \mid (x, y) \in \mathbb{Z}^2\} = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{Z}^2\} = G$.

(c) $(F, *)$ est un groupe commutatif (sous-groupe de $(E, *)$, loi commutative dans F) et φ est un homomorphisme de $(F, *)$ vers $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$; l'image d'un groupe commutatif par un homomorphisme est un groupe commutatif pour la loi d'arrivée. Donc $(\varphi(F), \times) = (G, \times)$ est un groupe commutatif (d'élément neutre $\varphi(0) = M(0, 0) = I$, l'inverse de $M(x, y)$ étant $M(-x, -y)$).