

Examen national — Mathématiques (sujet d'entraînement)

Session normale 2025

Durée : 4 heures. L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.
Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Barème : 3 + 3 + 3 + 11 points.

Arithmétique

Exercice 1 (3 points).

- Déterminer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, $\text{pgcd}(2025, 1287)$.
- (a) Vérifier que le couple $(3, 4)$ est une solution de l'équation $(E) : 7x - 5y = 1$ dans $\mathbb{Z}^2$. (b) Résoudre (E) dans $\mathbb{Z}^2$.
- (a) Montrer que $7^4 \equiv 1[10]$. (b) En déduire le chiffre des unités de 7^{2025} .

Structures algébriques

Exercice 2 (3 points). On définit sur $\mathbb{R}$ la loi de composition interne $*$ par : $x * y = x + y - xy$.

- Montrer que pour tous réels x, y : $x * y = 1 - (1 - x)(1 - y)$.
- En déduire que $*$ est commutative et associative.
- Montrer que $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ est stable par $*$.
- Montrer que $(E, *)$ est un groupe commutatif (on précisera l'élément neutre et le symétrique d'un élément x de E).
- Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^*$ définie par $\varphi(x) = 1 - x$. Montrer que φ est un isomorphisme de $(E, *)$ vers $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Nombres complexes

Exercice 3 (3 points). Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1 + i)z + i = 0$.
- Écrire $1 + i$ sous forme trigonométrique et en déduire la forme algébrique de $(1 + i)^{2024}$.
- Soient A et B les points d'affixes 1 et i . Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z ($z \neq i$) tels que $\frac{z-1}{z-i}$ soit imaginaire pur.

Problème d'analyse

Exercice 4 (11 points). Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x \ln x - x + 1$, et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé.

Partie A.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f ce prolongement.
2. Étudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; interpréter.
4. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et dresser le tableau de variations de f .
5. En déduire que pour tout $x > 0$: $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$.

Partie B.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note g sa bijection réciproque.
2. Calculer $g(0)$ et $g(1)$.
3. Montrer que g est dérivable en 1 et calculer $g'(1)$.

Partie C.

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^e x \ln x \, dx$.
2. En déduire $\int_1^e f(x) \, dx$ et interpréter graphiquement.