

Examen national — Corrigé (sujet d'entraînement)

Session normale 2025

Arithmétique

Solution 1.

1. $2025 = 1287 \times 1 + 738$; $1287 = 738 \times 1 + 549$; $738 = 549 \times 1 + 189$; $549 = 189 \times 2 + 171$; $189 = 171 \times 1 + 18$; $171 = 18 \times 9 + 9$; $18 = 9 \times 2 + 0$. Donc $\text{pgcd}(2025, 1287) = 9$.
2. (a) $7 \times 3 - 5 \times 4 = 21 - 20 = 1$. (b) Si (x, y) est solution, par différence avec $(3, 4)$: $7(x - 3) = 5(y - 4)$. Donc 5 divise $7(x - 3)$; comme 5 et 7 sont premiers entre eux, 5 divise $x - 3$ (Gauss) : $x = 3 + 5k$, puis $y = 4 + 7k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Réciproquement ces couples conviennent : $S = \{(3 + 5k, 4 + 7k); k \in \mathbb{Z}\}$.
3. (a) $7^2 = 49 \equiv -1[10]$, donc $7^4 \equiv 1[10]$. (b) $2025 = 4 \times 506 + 1$, donc $7^{2025} = (7^4)^{506} \times 7 \equiv 7[10]$: le chiffre des unités est 7.

Structures algébriques

Solution 2.

1. $1 - (1 - x)(1 - y) = 1 - (1 - x - y + xy) = x + y - xy = x * y$.
2. Commutativité : $(1 - x)(1 - y) = (1 - y)(1 - x)$. Associativité : $(x * y) * z = 1 - (1 - x * y)(1 - z) = 1 - (1 - x)(1 - y)(1 - z)$, et par symétrie $x * (y * z)$ vaut la même chose.
3. Si $x \neq 1$ et $y \neq 1$, alors $(1 - x)(1 - y) \neq 0$, donc $x * y = 1 - (1 - x)(1 - y) \neq 1$: E est stable.
4. Neutre : $x * 0 = x$, donc $e = 0 \in E$. Symétrique de $x \in E$: on cherche x' tel que $(1 - x)(1 - x') = 1$, soit $x' = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{x-1}$, qui est bien différent de 1. Avec l'associativité et la commutativité, $(E, *)$ est un groupe commutatif.
5. φ est une bijection de E sur $\mathbb{R}^*$ (réciproque $t \rightarrow 1 - t$), et $\varphi(x * y) = 1 - (x * y) = (1 - x)(1 - y) = \varphi(x)\varphi(y)$: φ est un morphisme bijectif, donc un isomorphisme de $(E, *)$ sur $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Nombres complexes

Solution 3.

1. Somme des racines $1 + i$ et produit i : les solutions sont 1 et i (vérification : $1 + i = 1 + i$ et $1 \times i = i$). $S = \{1, i\}$.

2. $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc $(1+i)^{2024} = 2^{1012}e^{i506\pi} = 2^{1012}$ (car 506 est pair).
3. $\frac{z-1}{z-i}$ est imaginaire pur non nul si et seulement si $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, c'est-à-dire $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$: M décrit le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B . Le cas $z = 1$ donne le quotient nul, qui est imaginaire pur : l'ensemble est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B .

Problème d'analyse

Solution 4.

Partie A.

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$: f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.
2. $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x \ln x - x}{x} = \ln x - 1 \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$: f n'est pas dérivable en 0 ; la courbe admet une demi-tangente verticale au point $(0, 1)$.
3. $f(x) = x(\ln x - 1) + 1 \rightarrow +\infty$ et $\frac{f(x)}{x} = \ln x - 1 + \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$: $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
4. $f'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$: f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$, avec un minimum $f(1) = 0$.
5. Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq f(1) = 0$, soit $x \ln x \geq x - 1$; en divisant par $x > 0$: $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$.

Partie B.

1. f est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$, donc réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $J = [f(1), \lim_{+\infty} f[= [0, +\infty[$.
2. $g(0) = 1$ car $f(1) = 0$. $f(x) = 1 \iff x(\ln x - 1) = 0 \iff x = e$ (car $x \geq 1$), donc $g(1) = e$.
3. f est dérivable en $e = g(1)$ avec $f'(e) = \ln e = 1 \neq 0$, donc g est dérivable en 1 et $g'(1) = \frac{1}{f'(e)} = 1$.

Partie C.

1. Posons $u = \ln x$, $v' = x$: $u' = \frac{1}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$. $\int_1^e x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$.
2. $\int_1^e f(x) \, dx = \frac{e^2+1}{4} + \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_1^e = \frac{e^2+1}{4} - \frac{e^2}{2} + e - \frac{1}{2} = \frac{-e^2+4e-1}{4} \approx 0,62$. C'est l'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites $x = 1$, $x = e$, car $f \geq 0$.