

Examen national : Mathématiques

Session de rattrapage 2024 (épreuve officielle RS 25)

Durée : 4 heures. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.

L'épreuve comporte cinq exercices indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat. Barème : 6,5 + 3,5 + 3,5 + 3,5 + 3 points. L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

Analyse

Exercice 1 (6.5 points). Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la fonction numérique f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[; \quad f_n(x) = x - x^n \ln x$$

Et on note $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que f_n est continue à droite en 0. (0,25 pt)
- (b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n \frac{x}{x} = -\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. (0,75 pt)
- (c) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et que son nombre dérivé à droite en 0 est égal à 1. (0,5 pt)
- (d) Montrer que f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0, +\infty[; \quad f_n'(x) = 1 - x^{n-1} - nx^{n-1} \ln x$$

(0,5 pt)

- (e) Montrer que f_n est strictement croissante sur $[0; 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. (0,5 pt)
2. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $\forall x \in [0, +\infty[; f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. (0,5 pt)
- (b) En déduire la position relative des deux courbes $(\mathcal{C}_n)$ et $(\mathcal{C}_{n+1})$. (0,25 pt)
3. (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique réel $\alpha_n \in]1; 2[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$. (On prendra $\ln 2 = 0,7$.) (0,5 pt)
- (b) Vérifier que $(\forall n \geq 2), \alpha_{n+1}^n \ln \alpha_{n+1} = 1$. (0,25 pt)
- (c) En déduire que pour tout $n \geq 2, f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} - 1$. (0,25 pt)
- (d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ ainsi définie est strictement décroissante. (0,5 pt)
- (e) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est convergente. (0,25 pt)
4. On pose : $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.
- (a) Montrer que : $1 \leq \ell \leq 2$. (0,25 pt)
- (b) Montrer que pour tout $n \geq 2, n - 1 = -\frac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$. (0,5 pt)
- (c) On suppose que $\ell > 1$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$ en fonction de ℓ . (0,25 pt)
- (d) En déduire la valeur de la limite ℓ . (0,5 pt)

Analyse

Exercice 2 (3.5 points).

- (a) Calculer l'intégrale : $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$. (0,25 pt)
 (b) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2+k^2}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente puis déterminer sa limite. (0,5 pt)
- Montrer que : $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \leq 1$. (0,25 pt)
- (a) Montrer que : $(\forall x \in [0, 1]) ; 0 \leq e^x - 1 \leq e.x$. (0,5 pt)
 (b) En déduire que : $(\forall x \in [0, 1]) ; 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{e}{2}x^2$. (0,25 pt)
- Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $w_n = \sum_{k=1}^{k=n} \left(e^{\frac{n}{n^2+k^2}} - 1 \right)$.
 (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{n}{n^2+k^2} \right)^2$. (0,25 pt)
 (b) Montrer que la fonction $x \mapsto (1+x^2)^{-2}$ est strictement décroissante sur $[0, 1]$. (0,25 pt)
 (c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout entier $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$\frac{1}{n} \left(1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right)^{-2} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (1+x^2)^{-2} dx$$

(0,25 pt)

- (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2n}$. (0,5 pt)
 (b) En déduire que la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite. (0,5 pt)

Nombres complexes

Exercice 3 (3.5 points). Soit $m \in \mathbb{C}^*$.

Partie I. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E) : z^2 - (2+i)mz + m^2(1+i) = 0$$

- (a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (im)^2$. (0,25 pt)
 (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) . (0,5 pt)
- Soient z_1 et z_2 les deux solutions de (E) . Mettre sous la forme exponentielle $z_1 z_2$ dans le cas où $m = re^{i\theta}$ ($r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$). (0,5 pt)

Partie II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On pose $z_1 = m$ et $z_2 = m(1+i)$. Soit M_1 le point d'affixe z_1 , M_2 le point d'affixe z_2 et $M_3(z_3)$ l'image du point O par la rotation de centre M_2 et d'angle $(-\frac{\pi}{2})$ et $M_4(z_4)$ l'image du point M_1 par l'homothétie de centre O et de rapport k ($k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$).

- Calculer z_3 en fonction de m et z_4 en fonction de m et k . (0,75 pt)
- Donner la forme algébrique de $\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \times \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$. (0,75 pt)
- En déduire que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont cocycliques si et seulement si $k = -2$. (0,75 pt)

Structures algébriques

Exercice 4 (3.5 points). On munit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4; \quad (x + iy) * (x' + iy') = (xy' + y^5 x') + iyy'$$

Partie I.

1. (a) Vérifier que : $1 * 2i = 2$. (0,25 pt)
 (b) Montrer que la loi de composition interne $*$ n'est pas commutative. (0,25 pt)
2. Montrer que la loi $*$ est associative. (0,5 pt)
3. (a) Vérifier que : $1 * (1 + 2i) = 2$. (0,25 pt)
 (b) En déduire que $(\mathbb{C}, *)$ n'est pas un groupe. (0,25 pt)
4. Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par $E = \{x + yi \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}^*\}$.
 (a) Montrer que E est stable dans $(\mathbb{C}, *)$. (0,25 pt)
 (b) Montrer que $(E, *)$ est un groupe non commutatif. (0,5 pt)

Partie II. On considère les sous-ensembles de E définis par : $F = \{yi \mid y \in \mathbb{R}^*\}$ et $G = \{x + i \mid x \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que F est un sous-groupe de $(E, *)$. (0,5 pt)
2. On considère l'application φ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ par : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi(x) = x + i$.
 (a) Montrer que : $\varphi(\mathbb{R}) = G$. (0,25 pt)
 (b) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{C}, *)$. (0,25 pt)
 (c) En déduire que $(G, *)$ est un groupe commutatif. (0,25 pt)

Arithmétique

Exercice 5 (3 points).

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer l'entier $u \in \{1, 2, \dots, 22\}$ tel que : $10u \equiv 1[23]$. (0,5 pt)
2. Soient m un entier naturel et q et r , respectivement, le quotient et le reste de la division euclidienne de m par 10.
 (a) Montrer que : $m \equiv 10(q + ur)[23]$. (0,5 pt)
 (b) Montrer que : $23 \text{ divise } m \iff 23 \text{ divise } (q + ur)$. (0,75 pt)
3. On considère dans $\mathbb{N}$ le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 1[23] \\ x \equiv 2[10] \end{cases}$.
 (a) Montrer que si x est une solution du système (S) alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $x = 10q + 2$ et $23 \text{ divise } (q + 7)$. (0,75 pt)
 (b) Résoudre dans $\mathbb{N}$ le système (S) . (0,5 pt)