

Examen national : Corrigé

Session de rattrapage 2024 (épreuve officielle RS 25)

Analyse

Solution 1.

1. (a) Pour $x > 0$, $x^n \ln x = x^{n-1} \times (x \ln x)$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ (croissances comparées) et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{n-1} = 0$ (car $n - 1 \geq 1$). Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = 0 - 0 = 0 = f_n(0)$: f_n est continue à droite en 0.
- (b) Pour $x > 0$, $f_n(x) = x^n(x^{1-n} - \ln x)$. Quand $x \rightarrow +\infty$: $x^{1-n} = \frac{1}{x^{n-1}} \rightarrow 0$ (car $n - 1 \geq 1$) et $\ln x \rightarrow +\infty$, donc $x^{1-n} - \ln x \rightarrow -\infty$; de plus $x^n \rightarrow +\infty$. Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty$. Ensuite $f_n \frac{x}{x} = 1 - x^{n-1} \ln x$ avec $x^{n-1} \ln x \rightarrow +\infty$ (produit de deux quantités tendant vers $+\infty$, car $n - 1 \geq 1$), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n \frac{x}{x} = -\infty$. Interprétation : la courbe $(\mathcal{C}_n)$ admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
- (c) Pour $x > 0$: $\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \frac{x - x^n \ln x}{x} = 1 - x^{n-1} \ln x$. Comme $n - 1 \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{n-1} \ln x = 0$ (croissances comparées : $x^{n-1} \ln x = x^{n-2} \times x \ln x$ si $n \geq 3$, et $x \ln x \rightarrow 0$ si $n = 2$). Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = 1$: f_n est dérivable à droite en 0 et son nombre dérivé à droite en 0 vaut 1.
- (d) Sur $]0, +\infty[$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^n \ln x$ sont dérivables (produit de fonctions dérivables), donc f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$f_{n'}(x) = 1 - \left(nx^{n-1} \ln x + x^n \times \frac{1}{x} \right) = 1 - x^{n-1} - nx^{n-1} \ln x.$$

- (e) Soit $x \in]0, 1[$: $0 < x^{n-1} < 1$ donc $1 - x^{n-1} > 0$, et $\ln x < 0$ donc $-nx^{n-1} \ln x > 0$; ainsi $f_{n'}(x) > 0$. Soit $x > 1$: $x^{n-1} > 1$ donc $1 - x^{n-1} < 0$, et $\ln x > 0$ donc $-nx^{n-1} \ln x < 0$; ainsi $f_{n'}(x) < 0$. Comme f_n est continue sur $[0; 1]$ (continue à droite en 0 et sur $]0, 1[$) avec $f_{n'} > 0$ sur $]0, 1[$, f_n est strictement croissante sur $[0; 1]$; et f_n est continue sur $[1, +\infty[$ avec $f_{n'} < 0$ sur $]1, +\infty[$, donc strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.
2. (a) Pour $x = 0$: $f_{n+1}(0) = f_n(0) = 0$. Pour $x > 0$:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^n \ln x - x^{n+1} \ln x = x^n(1 - x) \ln x.$$

- Si $0 < x < 1$: $1 - x > 0$ et $\ln x < 0$, donc $x^n(1 - x) \ln x < 0$. Si $x \geq 1$: $1 - x \leq 0$ et $\ln x \geq 0$, donc $x^n(1 - x) \ln x \leq 0$. Dans tous les cas $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.
- (b) La courbe $(\mathcal{C}_{n+1})$ est au-dessous de la courbe $(\mathcal{C}_n)$ sur $[0, +\infty[$; les deux courbes ont en commun les points d'abscisses 0 et 1 (où $f_{n+1}(x) = f_n(x)$, à savoir $O(0, 0)$ et $A(1, 1)$).
3. (a) f_n est continue et strictement décroissante sur $[1; 2]$ (question 1.(e)). $f_n(1) = 1 - 0 = 1 > 0$ et $f_n(2) = 2 - 2^n \ln 2 \leq 2 - 4 \times 0,7 = -0,8 < 0$ car $2^n \geq 4$ pour $n \geq 2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (version bijection), il existe un unique réel $\alpha_n \in]1; 2[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
 - (b) α_{n+1} est le zéro de f_{n+1} : $\alpha_{n+1} - \alpha_{n+1}^{n+1} \ln \alpha_{n+1} = 0$, soit $\alpha_{n+1}^{n+1} \ln \alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}$. En divisant par $\alpha_{n+1} \neq 0$: $\alpha_{n+1}^n \ln \alpha_{n+1} = 1$.

- (c) $f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} - \alpha_{n+1}^n \ln \alpha_{n+1} = \alpha_{n+1} - 1$ d'après (b).
 (d) Comme $\alpha_{n+1} > 1$, (c) donne $f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} - 1 > 0 = f_n(\alpha_n)$. Les réels α_n et α_{n+1} sont dans $[1, +\infty[$ où f_n est strictement décroissante, donc $f_n(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_n)$ entraîne $\alpha_{n+1} < \alpha_n$. La suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante.
 (e) $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et minorée par 1 (car $\alpha_n \in]1, 2[$), donc elle est convergente (théorème de la convergence monotone).
 4. (a) Pour tout $n \geq 2$, $1 < \alpha_n < 2$; par passage à la limite dans les inégalités, $1 \leq \ell \leq 2$.
 (b) De $f_n(\alpha_n) = 0$: $\alpha_n^n \ln \alpha_n = \alpha_n$, donc $\alpha_n^{n-1} \ln \alpha_n = 1$. Comme $\alpha_n > 1$, $\ln \alpha_n > 0$ et on peut prendre le logarithme : $(n-1) \ln \alpha_n + \ln(\ln \alpha_n) = 0$, d'où, en divisant par $\ln \alpha_n \neq 0$:

$$n-1 = -\frac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}.$$

(c) Si $\ell > 1$: par continuité de $\ln$ en ℓ , $\ln(\alpha_n) \rightarrow \ln \ell > 0$, puis par continuité de $\ln$ en $\ln \ell > 0$, $\ln(\ln(\alpha_n)) \rightarrow \ln(\ln \ell)$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)} = \frac{\ln(\ln \ell)}{\ln \ell}.$$

(d) Raisonnons par l'absurde : si $\ell > 1$, alors d'après (b) et (c), $n-1 = -\frac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$ tend vers le réel fini $-\frac{\ln(\ln \ell)}{\ln \ell}$, ce qui est absurde puisque $n-1 \rightarrow +\infty$. Donc $\ell \leq 1$, et avec (a) : $\ell = 1$.

Analyse

Solution 2.

1. (a) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$.
 (b) Pour $k \in \{1, \dots, n\}$: $\frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$, donc $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(\frac{k}{n})$ avec $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, continue sur $[0, 1]$. On reconnaît une somme de Riemann de g sur $[0, 1]$: (u_n) converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

2. Pour $x \in [0, 1]$, $1+x^2 \geq 1$, donc $(1+x^2)^2 \geq 1$ et $0 < \frac{1}{(1+x^2)^2} \leq 1$. En intégrant sur $[0, 1]$ (bornes croissantes) : $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \leq \int_0^1 1 dx = 1$.
 3. (a) Soit $x \in [0, 1]$. Si $x = 0$ les inégalités sont des égalités. Si $x > 0$, la fonction $\exp$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$: d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, x[$ tel que $e^x - e^0 = xe^c$. Or $0 < c < x \leq 1$ donne $1 < e^c < e$, donc $0 < xe^c < ex$, soit $0 \leq e^x - 1 \leq ex$.
 (b) Soit $x \in [0, 1]$. Pour tout $t \in [0, x] \subset [0, 1]$, (a) donne $0 \leq e^t - 1 \leq et$. En intégrant entre 0 et x (bornes croissantes) : $0 \leq \int_0^x (e^t - 1) dt \leq \int_0^x et dt$, c'est-à-dire $0 \leq [e^t - t]_0^x \leq [e \frac{t^2}{2}]_0^x$, soit $0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{e}{2}x^2$.
 4. (a) Posons $x_k = \frac{n}{n^2+k^2}$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$. Comme $n \leq n^2 \leq n^2 + k^2$, $x_k \in]0, 1]$. Alors

$$w_n - u_n = \sum_{k=1}^n (e^{x_k} - 1) - \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n (e^{x_k} - 1 - x_k).$$

D'après 3.(b), $0 \leq e^{x_k} - 1 - x_k \leq \frac{e}{2}x_k^2$ pour chaque k ; en sommant :

$$0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{n}{n^2 + k^2} \right)^2.$$

(b) La fonction $h : x \mapsto (1 + x^2)^{-2}$ est dérivable sur $[0, 1]$ et $h'(x) = -2 \times 2x \times (1 + x^2)^{-3} = \frac{-4x}{(1+x^2)^3}$, strictement négatif sur $]0, 1]$ (et nul seulement en 0). Donc h est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

(c) Soient $n \geq 1$ et $k \in \{1, \dots, n\}$. Pour tout $x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] \subset [0, 1]$, on a $x \leq \frac{k}{n}$ donc, h étant décroissante, $h(x) \geq h(\frac{k}{n}) = \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{-2}$. En intégrant sur $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, de longueur $\frac{1}{n}$:

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (1 + x^2)^{-2} dx \geq \frac{1}{n} \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{-2}.$$

5. (a) Pour $k \in \{1, \dots, n\}$: $\left(\frac{n}{n^2 + k^2}\right)^2 = \frac{n^2}{n^4 \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^2} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{-2} \leq \frac{1}{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (1 + x^2)^{-2} dx$ d'après 4.(c). En sommant pour k de 1 à n et en utilisant la relation de Chasles puis la question 2 :

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{n^2 + k^2}\right)^2 \leq \frac{1}{n} \int_0^1 (1 + x^2)^{-2} dx \leq \frac{1}{n}.$$

Avec 4.(a) : $0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2} \times \frac{1}{n} = \frac{e}{2n}$.

(b) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{2n} = 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n - u_n) = 0$. Or $w_n = u_n + (w_n - u_n)$ et $u_n \rightarrow \frac{\pi}{4}$, donc $(w_n)_{n \geq 1}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{\pi}{4}$.

Nombres complexes

Solution 3.

Partie I.

1. (a) $\Delta = ((2 + i)m)^2 - 4m^2(1 + i) = m^2((2 + i)^2 - 4 - 4i) = m^2(4 + 4i - 1 - 4 - 4i) = -m^2 = (im)^2$.

(b) $\Delta = (im)^2$ avec $im \neq 0$, donc (E) admet deux solutions distinctes :

$$z = \frac{(2 + i)m + im}{2} = (1 + i)m \quad \text{et} \quad z = \frac{(2 + i)m - im}{2} = m.$$

L'ensemble des solutions est $S = \{m, (1 + i)m\}$.

2. $z_1 z_2 = m \times (1 + i)m = m^2(1 + i)$. Avec $m = re^{i\theta}$: $m^2 = r^2 e^{2i\theta}$, et $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Donc

$$z_1 z_2 = r^2 \sqrt{2} e^{i(2\theta + \frac{\pi}{4})}.$$

Partie II.

1. La rotation de centre M_2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ envoie O sur M_3 : $z_3 - z_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}}(0 - z_2) = -i \times (-z_2) = iz_2$. Donc $z_3 = (1 + i)z_2 = (1 + i)^2 m = 2im$. L'homothétie de centre O et de rapport k envoie M_1 sur M_4 : $z_4 - 0 = k(z_1 - 0)$, donc $z_4 = km$.

2. Comme $m \neq 0$ et $k \neq 1$, les dénominateurs sont non nuls et, en simplifiant par m :

$$\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} = \frac{km - (1+i)m}{km - m} = \frac{k-1-i}{k-1}, \quad \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{2im - m}{2im - (1+i)m} = \frac{-1+2i}{-1+i}.$$

Or $\frac{-1+2i}{-1+i} = \frac{(-1+2i)(-1-i)}{(-1)^2+1^2} = \frac{1+i-2i-2i^2}{2} = \frac{3-i}{2}$. Donc

$$\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \times \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{(k-1-i)(3-i)}{2(k-1)} = \frac{3(k-1) - 1 - i(k-1) - 3i}{2(k-1)} = \frac{3k-4}{2(k-1)} - \frac{k+2}{2(k-1)}i.$$

3. Les points M_1, M_2, M_3 ne sont pas alignés : $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{2i-1}{i} = 2+i \notin \mathbb{R}$. Ils déterminent donc un unique cercle, et M_4 (distinct de M_1 car $k \neq 1$, et distinct de M_2, M_3 car k est réel) est sur ce cercle si et seulement si

$$\left(\overrightarrow{M_4 M_1}, \overrightarrow{M_4 M_2} \right) \equiv \left(\overrightarrow{M_3 M_1}, \overrightarrow{M_3 M_2} \right) [\pi],$$

c'est-à-dire si et seulement si le nombre $\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \times \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$ (dont un argument est $\left(\overrightarrow{M_4 M_1}, \overrightarrow{M_4 M_2} \right) - \left(\overrightarrow{M_3 M_1}, \overrightarrow{M_3 M_2} \right)$) est un réel. D'après la question 2, ce nombre est réel si et seulement si $\frac{k+2}{2(k-1)} = 0$, soit $k = -2$. Donc M_1, M_2, M_3, M_4 sont cocycliques si et seulement si $k = -2$.

Structures algébriques

Solution 4.

Partie I.

- (a) Avec $x = 1, y = 0, x' = 0, y' = 2$: $1 * 2i = (1 \times 2 + 0^5 \times 0) + i \times 0 \times 2 = 2$.
(b) $2i * 1$: $x = 0, y = 2, x' = 1, y' = 0$, donc $2i * 1 = (0 \times 0 + 2^5 \times 1) + i \times 2 \times 0 = 32$.
Comme $1 * 2i = 2 \neq 32 = 2i * 1$, la loi $*$ n'est pas commutative.
- Soient $z = x + iy, z' = x' + iy', z'' = x'' + iy''$ trois complexes (x, y, x', y', x'', y'' réels).

$$z * z' * z'' = ((xy' + y^5 x') + iyy') * (x'' + iy'') = ((xy' + y^5 x')y'' + (yy')^5 x'') + iyy'y'' = (xy'y'' + y^5 x'y'' + y^5 y'^5 x'') + iyy'y''$$

$$z * (z' * z'') = (x + iy) * ((x'y'' + y'^5 x'') + iy'y'') = (xy'y'' + y^5 (x'y'' + y'^5 x'')) + iyy'y'' = (xy'y'' + y^5 x'y'' + y^5 y'^5 x'') + iyy'y''$$

Les deux résultats sont égaux : la loi $*$ est associative.

- (a) $1 * (1 + 2i)$: $x = 1, y = 0, x' = 1, y' = 2$, donc $1 * (1 + 2i) = (1 \times 2 + 0^5 \times 1) + i \times 0 \times 2 = 2$.
(b) On a $1 * 2i = 2 = 1 * (1 + 2i)$ avec $2i \neq 1 + 2i$. Dans un groupe tout élément est régulier (simplifiable) : $1 * a = 1 * b$ entraînerait $a = b$ (en composant à gauche par le symétrique de 1). Ce n'est pas le cas ici, donc $(\mathbb{C}, *)$ n'est pas un groupe.
- (a) Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ dans E ($y \neq 0, y' \neq 0$). Alors $z * z' = (xy' + y^5 x') + iyy'$ avec $xy' + y^5 x' \in \mathbb{R}$ et $yy' \in \mathbb{R}^*$ (produit de deux réels non nuls). Donc $z * z' \in E$: E est stable pour $*$.
(b) La loi $*$ est interne dans E (a) et associative dans $\mathbb{C}$ donc dans E . **Élément neutre** : $i = 0 + 1i \in E$ et pour tout $z = x + iy \in E$: $z * i = (x \times 1 + y^5 \times 0) + iy \times 1 = z$ et $i * z = (0 \times y + 1^5 \times x) + i \times 1 \times y = z$. Donc i est élément neutre. **Symétrique** : soit $z = x + iy \in E$. Cherchons $z' = x' + iy' \in E$ tel que $z * z' = i$: $yy' = 1$ et $xy' + y^5 x' = 0$, soit $y' = \frac{1}{y}$ et $x' = -\frac{x}{y^6}$. Posons $z' = -\frac{x}{y^6} + i\frac{1}{y} \in E$. On a $z * z' = \left(\frac{x}{y} - y^5 \frac{x}{y^6} \right) + i = i$ et $z' * z = \left(-\frac{x}{y^6} \times y + \left(\frac{1}{y} \right) x \right) + i \left(\frac{1}{y} \right) y = \left(-\frac{x}{y^5} + \frac{x}{y^5} \right) + i = i$. Donc tout élément de E admet un symétrique

dans E , et $(E, *)$ est un groupe. **Non commutatif** : $(1+i) * 2i = (1 \times 2 + 1^5 \times 0) + i \times 1 \times 2 = 2 + 2i$ et $2i * (1+i) = (0 \times 1 + 2^5 \times 1) + i \times 2 \times 1 = 32 + 2i$; ces deux éléments de E ne commutent pas. Donc $(E, *)$ est un groupe non commutatif.

Partie II.

1. $F \subset E$ (un élément yi de F s'écrit $0 + yi$ avec $y \neq 0$) et F contient l'élément neutre i ($y = 1$). Soient yi et $y'i$ dans F . Le symétrique de $y'i$ dans $(E, *)$ est, d'après I.4.(b) (avec $x' = 0$), $(\frac{1}{y'})i$. Alors

$$(yi) * \left(\left(\frac{1}{y'} \right) i \right) = \left(0 \times \frac{1}{y'} + y^5 \times 0 \right) + iy \times \frac{1}{y'} = \left(\frac{y}{y'} \right) i \in F$$

car $\frac{y}{y'} \in \mathbb{R}^*$. Donc F est un sous-groupe de $(E, *)$.

2. (a) $\varphi(\mathbb{R}) = \{\varphi(x) / x \in \mathbb{R}\} = \{x + i / x \in \mathbb{R}\} = G$.
 (b) Pour tous $x, x' \in \mathbb{R}$: $\varphi(x) * \varphi(x') = (x + i) * (x' + i) = (x \times 1 + 1^5 \times x') + i \times 1 \times 1 = (x + x') + i = \varphi(x + x')$. Donc φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{C}, +)$.
 (c) $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif et φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{C}, *)$; l'image d'un groupe commutatif par un homomorphisme est un groupe commutatif (pour la loi d'arrivée). Donc $(\varphi(\mathbb{R}), *) = (G, *)$ est un groupe commutatif. Détail : G est stable ($\varphi(x) * \varphi(x') = \varphi(x + x') \in G$), $*$ est associative, $\varphi(0) = i$ est neutre dans G , le symétrique de $\varphi(x)$ est $\varphi(-x) = -x + i \in G$, et $\varphi(x) * \varphi(x') = \varphi(x + x') = \varphi(x' + x) = \varphi(x') * \varphi(x)$.

Arithmétique

Solution 5.

1. Algorithme d'Euclide pour 23 et 10 : $23 = 2 \times 10 + 3$; $10 = 3 \times 3 + 1$; $3 = 3 \times 1 + 0$.
 Donc $23 \wedge 10 = 1$ et, en remontant : $1 = 10 - 3 \times 3 = 10 - 3 \times (23 - 2 \times 10) = 7 \times 10 - 3 \times 23$. Ainsi $10 \times 7 \equiv 1[23]$ (en effet $70 = 3 \times 23 + 1$) : $u = 7$. (Cet entier est unique dans $\{1, \dots, 22\}$: si $10u \equiv 10u'[23]$ alors $u \equiv u'[23]$ car 10 est inversible modulo 23.)
2. (a) $m = 10q + r$. Or $10(q + ur) = 10q + 10ur = 10q + 70r$ et $70 \equiv 1[23]$, donc $10(q + ur) \equiv 10q + r = m[23]$, c'est-à-dire $m \equiv 10(q + ur)[23]$.
 (b) Si 23 divise $q + ur$, alors 23 divise $10(q + ur)$, donc 23 divise m d'après (a). Réciproquement, si 23 divise m , alors 23 divise $10(q + ur)$; comme $23 \wedge 10 = 1$, le théorème de Gauss donne : 23 divise $q + ur$. D'où l'équivalence.
3. (a) Soit $x \in \mathbb{N}$ solution de (S) . De $x \equiv 2[10]$ avec $0 \leq 2 < 10$, le reste de la division euclidienne de x par 10 est 2 : il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $x = 10q + 2$. Posons $m = x - 1 = 10q + 1 \in \mathbb{N}$: son quotient par 10 est q et son reste est 1. Comme $x \equiv 1[23]$, 23 divise m , et d'après 2.(b) (avec $u = 7, r = 1$), 23 divise $q + 7 \times 1 = q + 7$.
 (b) D'après (a), si x est solution alors $x = 10q + 2$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $q + 7 \equiv 0[23]$, soit $q \equiv -7 \equiv 16[23]$: $q = 16 + 23k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et $q \geq 0$ impose $k \in \mathbb{N}$. Alors $x = 10(16 + 23k) + 2 = 162 + 230k$. Réciproquement, pour $k \in \mathbb{N}$, $x = 162 + 230k$ vérifie $x \equiv 162 \equiv 2[10]$ et $x = 1 + 161 + 230k = 1 + 23(7 + 10k) \equiv 1[23]$. L'ensemble des solutions de (S) dans $\mathbb{N}$ est $\{162 + 230k; k \in \mathbb{N}\}$.