

Examen national : Mathématiques

Session normale 2024 (épreuve officielle NS 24F)

Durée : 4 heures. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.

L'épreuve comporte cinq exercices indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat. Barème : 7,5 + 2,5 + 3,5 + 3,5 + 3 points. L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

Analyse

Exercice 1 (7.5 points). Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par :

$$f(1) = \frac{1}{2} \quad \text{et pour tout } x \in]1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que f est continue à droite en 1. (0,5 pt)
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. (0,5 pt)
3. (a) Soit $x \in]1, +\infty[$. En posant $t = (x - 1)^2$, vérifier que :

$$\frac{1 - x + \ln(x)}{(x - 1)^2} = \frac{-\sqrt{t} + \ln(1 + \sqrt{t})}{t}$$

(0,25 pt)

- (b) Montrer que $(\forall t \in]0, +\infty[), -\frac{1}{2} < \frac{-\sqrt{t} + \ln(1 + \sqrt{t})}{t} < \frac{-1}{2(1 + \sqrt{t})}$. (0,5 pt)

(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0; t]$.)

- (c) En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x + \ln(x)}{(x - 1)^2} = -\frac{1}{2}$. (0,25 pt)

4. (a) Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[$,

$$\frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x - 1} = -\frac{\ln(x)}{x - 1} \times \frac{1}{2(x + 1)} + \frac{\ln(x) - x + 1}{2(x - 1)^2}$$

(0,5 pt)

- (b) En déduire que f est dérivable à droite en 1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. (0,5 pt)

5. Pour tout $x \in [1, +\infty[$ on pose $I(x) = \int_1^x \frac{t^2 - 1}{t^3} dt$ et $J(x) = \int_1^x \frac{t^2 - 1}{t^2} dt$.

- (a) Montrer que : $\forall x \in [1, +\infty[, 0 \leq I(x) \leq J(x)$. (0,5 pt)

- (b) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[, I(x) = \ln(x) - \frac{x^2 - 1}{2x^2}$ et $J(x) = \frac{(x - 1)^2}{x}$. (0,5 pt)

- (c) Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[, f'(x) = \frac{-2}{(x + 1)^2} \times \frac{I(x)}{J(x)}$. (0,5 pt)

- (d) En déduire que : $\forall x \in]1, +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$. (0,5 pt)

6. (a) Dresser le tableau de variations de la fonction f . (0,25 pt)

- (b) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. (On prendra $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$ et $\|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$.) (0,5 pt)

7. Montrer que l'équation $f(x) = x - 1$ admet une unique solution a dans $]1, 2[$. (0,5 pt)
 8. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$a_0 \in [1, +\infty[\quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = 1 + f(a_n)$$

- (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), |a_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|a_n - a|$. (0,5 pt)
 (b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}), |a_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a|$. (0,5 pt)
 (c) En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. (0,25 pt)

Analyse

Exercice 2 (2.5 points). Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par : $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.

1. (a) Montrer que F est continue, strictement croissante sur $[0; 1]$. (0,5 pt)
 (b) En déduire que F est une bijection de $[0; 1]$ vers $[0; \beta]$ avec $\beta = \int_0^1 e^{t^2} dt$. (0,5 pt)
 2. On note F^{-1} la bijection réciproque de F . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right)$$

- (a) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\ell = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta F^{-1}(t) dt$. (0,5 pt)
 (b) Montrer que $\ell = \frac{1}{\beta} \int_0^1 u e^{u^2} du$. (0,5 pt)
 (On pourra effectuer le changement de variable $u = F^{-1}(t)$.)
 (c) En déduire que : $\ell = \frac{e-1}{2\beta}$. (0,5 pt)

Nombres complexes

Exercice 3 (3.5 points). Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E_\alpha) : z^2 - 2iz + \alpha = 0 \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{C}$$

Partie I.

1. (a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_α) est $\Delta = -4(1 + \alpha)$. (0,25 pt)
 (b) Déterminer l'ensemble des valeurs α pour lesquelles l'équation (E_α) admette dans l'ensemble $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes. (0,25 pt)
 2. On note z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_α) . Déterminer $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$. (0,5 pt)

Partie II. Soient Ω , M_1 et M_2 les points d'affixes respectivement α , z_1 et z_2 .

1. On suppose que $\alpha = m^2 - 2m$ avec $m \in \mathbb{R}$.
 (a) Déterminer z_1 et z_2 en fonction de m . (0,5 pt)
 (b) En déduire que les points O , M_1 et M_2 sont alignés. (0,25 pt)
 2. On suppose que les points O , M_1 et M_2 ne sont pas alignés.
 (a) Montrer que $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = 0$. (0,25 pt)
 (b) Montrer que : $|z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 - 4 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$. (0,5 pt)
 (c) En déduire que $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $|z_1 - z_2| = 2$. (0,25 pt)

3. (a) Montrer que : $(z_1 - z_2)^2 = \Delta$. (0,25 pt)
 (b) Déterminer l'ensemble Γ des points Ω pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle en O . (0,5 pt)

Structures algébriques

Exercice 4 (3.5 points). On considère dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ la loi de composition interne T définie par :

$$\forall ((a, b), (c, d)) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*)^2; \quad (a, b)T(c, d) = (a\bar{d} + c, bd)$$

($\bar{d}$ étant le conjugué du nombre complexe d .)

1. (a) Vérifier que $(i, 2)T(1, i) = (2, 2i)$, puis calculer $(1, i)T(i, 2)$. (0,5 pt)
 (b) En déduire que la loi T n'est pas commutative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. (0,25 pt)
2. Montrer que la loi T est associative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. (0,5 pt)
3. Vérifier que $(0, 1)$ est l'élément neutre pour T dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. (0,25 pt)
4. (a) Vérifier que $\forall (a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*; (a, b)T\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) = (0, 1)$. (0,5 pt)
 (b) Montrer que $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$ est un groupe non commutatif. (0,5 pt)
5. (a) Montrer que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est stable par la loi de composition interne T . (0,5 pt)
 (b) Montrer que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$. (0,5 pt)

Arithmétique

Exercice 5 (3 points). Soient p et q deux nombres premiers distincts et r un entier naturel premier avec p et avec q .

1. (a) Montrer que p divise $r^{p-1} - 1$ et que q divise $r^{q-1} - 1$. (1 pt)
 (b) En déduire que p et q divisent $r^{(p-1)(q-1)} - 1$. (0,5 pt)
 (c) Montrer que pq divise $r^{(p-1)(q-1)} - 1$. (0,5 pt)
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2024^{192}x \equiv 3[221]$. (On donne : $221 = 13 \times 17$.) (1 pt)