

Examen national : Corrigé

Session normale 2024 (épreuve officielle NS 24F)

Analyse

Solution 1.

- Pour $x > 1$, $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, donc $f(x) = \frac{\ln(x)}{x-1} \times \frac{1}{x+1}$. Or $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \ln'(1) = 1$ (taux d'accroissement de $\ln$ en 1) et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{2} = f(1)$: f est continue à droite en 1.
- Pour $x > 1$, $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2-1}$. Par croissances comparées $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
- (a) Soit $x > 1$ et $t = (x - 1)^2 > 0$. Comme $x - 1 > 0$, $\sqrt{t} = x - 1$, donc $x = 1 + \sqrt{t}$, $1 - x = -\sqrt{t}$ et $\ln(x) = \ln(1 + \sqrt{t})$. Ainsi

$$\frac{1 - x + \ln(x)}{(x - 1)^2} = \frac{-\sqrt{t} + \ln(1 + \sqrt{t})}{t}.$$

(b) Soit $t > 0$ et g la fonction définie sur $[0, t]$ par $g(s) = -\sqrt{s} + \ln(1 + \sqrt{s})$. g est continue sur $[0, t]$ (composée et somme de fonctions continues) et dérivable sur $]0, t[$ avec, pour $s > 0$:

$$g'(s) = -\frac{1}{2\sqrt{s}} + \frac{1}{2\sqrt{s}(1 + \sqrt{s})} = \frac{1}{2\sqrt{s}} \times \frac{-1 - \sqrt{s} + 1}{1 + \sqrt{s}} = \frac{-1}{2(1 + \sqrt{s})}.$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, t[$ tel que $g(t) - g(0) = (t - 0)g'(c)$, c'est-à-dire, puisque $g(0) = 0$:

$$\frac{-\sqrt{t} + \ln(1 + \sqrt{t})}{t} = \frac{-1}{2(1 + \sqrt{c})}.$$

Or $0 < c < t$ donne $1 < 1 + \sqrt{c} < 1 + \sqrt{t}$, puis $\frac{1}{2(1 + \sqrt{t})} < \frac{1}{2(1 + \sqrt{c})} < \frac{1}{2}$, et en changeant de signe :

$$-\frac{1}{2} < \frac{-\sqrt{t} + \ln(1 + \sqrt{t})}{t} < \frac{-1}{2(1 + \sqrt{t})}.$$

(c) Quand $x \rightarrow 1^+$, $t = (x - 1)^2 \rightarrow 0^+$ et $\frac{-1}{2(1 + \sqrt{t})} \rightarrow -\frac{1}{2}$. D'après (a) et (b), $\frac{1 - x + \ln(x)}{(x - 1)^2}$ est encadré par $-\frac{1}{2}$ et une quantité qui tend vers $-\frac{1}{2}$: par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x + \ln(x)}{(x - 1)^2} = -\frac{1}{2}$.

- (a) Soit $x > 1$. Réduisons le membre de droite au dénominateur commun $2(x - 1)^2(x + 1)$:

$$-\frac{\ln(x)}{x - 1} \times \frac{1}{2(x + 1)} + \frac{\ln(x) - x + 1}{2(x - 1)^2} = \frac{-(x - 1)\ln(x) + (x + 1)(\ln(x) - x + 1)}{2(x - 1)^2(x + 1)}.$$

Le numérateur vaut $-x \ln(x) + \ln(x) + x \ln(x) - x^2 + x + \ln(x) - x + 1 = 2 \ln(x) - x^2 + 1$.
D'autre part

$$\frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x - 1} = \frac{2 \ln(x) - (x^2 - 1)}{2(x^2 - 1)(x - 1)} = \frac{2 \ln(x) - x^2 + 1}{2(x - 1)^2(x + 1)},$$

car $(x^2 - 1)(x - 1) = (x - 1)^2(x + 1)$. Les deux expressions sont égales.

(b) Quand $x \rightarrow 1^+ : \frac{\ln(x)}{x-1} \rightarrow 1$, $\frac{1}{2(x+1)} \rightarrow \frac{1}{4}$ et, d'après 3.(c), $\frac{\ln(x)-x+1}{(x-1)^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$. D'après (a),

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Cette limite est finie : f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = -\frac{1}{2}$. Graphiquement, (C) admet au point $A(1, \frac{1}{2})$ une demi-tangente à droite de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$.

5. (a) Pour $t \geq 1 : t^2 - 1 \geq 0$ et $t^3 \geq t^2 > 0$, donc $0 \leq \frac{t^2-1}{t^3} \leq \frac{t^2-1}{t^2}$. Pour $x \geq 1$, les bornes $1 \leq x$ sont dans le bon ordre, et l'intégration conserve les inégalités : $0 \leq \int_1^x \frac{t^2-1}{t^3} dt \leq \int_1^x \frac{t^2-1}{t^2} dt$, soit $0 \leq I(x) \leq J(x)$.

(b) $\frac{t^2-1}{t^3} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}$, dont une primitive sur $]1, +\infty[$ est $t \mapsto \ln(t) + \frac{1}{2t^2}$. Donc

$$I(x) = \left[\ln(t) + \frac{1}{2t^2} \right]_1^x = \ln(x) + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} = \ln(x) - \frac{x^2 - 1}{2x^2}.$$

De même $\frac{t^2-1}{t^2} = 1 - \frac{1}{t^2}$, de primitive $t \mapsto t + \frac{1}{t}$, donc

$$J(x) = \left[t + \frac{1}{t} \right]_1^x = x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x - 1)^2}{x}.$$

(c) f est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables, et

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x^2 - 1) - 2x \ln(x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 1 - 2x^2 \ln(x)}{x(x^2 - 1)^2}.$$

D'autre part, avec (b) :

$$\frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{I(x)}{J(x)} = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{2x^2 \ln(x) - x^2 + 1}{2x^2} \times \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 1 - 2x^2 \ln(x)}{x(x-1)^2(x+1)^2},$$

et $(x-1)^2(x+1)^2 = (x^2-1)^2$. Donc $f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{I(x)}{J(x)}$.

(d) Pour $x > 1$, $J(x) = \frac{(x-1)^2}{x} > 0$ et, d'après (a), $0 \leq \frac{I(x)}{J(x)} \leq 1$. De plus $x+1 > 2$ donne $(x+1)^2 > 4$, donc $-\frac{1}{2} < \frac{-2}{(x+1)^2} < 0$. En multipliant le nombre négatif $\frac{-2}{(x+1)^2}$ par $\frac{I(x)}{J(x)} \in [0, 1]$:

$$\frac{-2}{(x+1)^2} \leq \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{I(x)}{J(x)} \leq 0, \quad \text{d'où} \quad -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0.$$

6. (a) f est continue sur $[1, +\infty[$ (continue à droite en 1, et continue sur $]1, +\infty[$), et $f'(x) \leq 0$ sur $]1, +\infty[$: f est décroissante sur $[1, +\infty[$, de $f(1) = \frac{1}{2}$ vers $\lim_{+\infty} f = 0$. Tableau de variations : sur la ligne de x , 1 puis $+\infty$; sur la ligne de $f'(x)$, le signe $-$ (avec $f'_d(1) = -\frac{1}{2}$) ; sur la ligne de f , une flèche descendante de $\frac{1}{2}$ (en $x = 1$) vers 0 (en $+\infty$).
- (b) [Figure : repère orthogonal avec 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée. La courbe part du point $A(1, \frac{1}{2})$ (soit 1 cm d'ordonnée) avec une demi-tangente de pente $-\frac{1}{2}$, décroît strictement, passe par les points d'abscisses 2, 3, 5 d'ordonnées environ 0,23, 0,14, 0,07, et se rapproche de l'axe des abscisses (asymptote horizontale $y = 0$) en restant au-dessus de lui. On peut aussi tracer la droite $y = x - 1$ qui coupe (C) au point d'abscisse $a \approx 1,36$.]

7. Soit h la fonction définie sur $[1, 2]$ par $h(x) = f(x) - x + 1$. h est continue sur $[1, 2]$ et strictement décroissante (somme de f , décroissante, et de $x \mapsto -x + 1$, strictement décroissante). De plus $h(1) = \frac{1}{2} > 0$ et $h(2) = \frac{\ln(2)}{3} - 1 < 0$ car $\ln 2 < 1 < 3$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (version bijection), l'équation $h(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x - 1$, admet une unique solution a dans $]1, 2[$.
8. Remarquons d'abord que $a_n \in [1, +\infty[$ pour tout n : c'est vrai pour a_0 , et si $a_n \geq 1$ alors $f(a_n) \geq 0$ (car f décroît vers 0, donc $f > 0$ sur $[1, +\infty[$), d'où $a_{n+1} = 1 + f(a_n) \geq 1$. Par ailleurs $f(a) = a - 1$ donne $a = 1 + f(a)$.
- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. f est continue sur $[1, +\infty[$, dérivable sur $]1, +\infty[$ et $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ sur $]1, +\infty[$ d'après 5.(d). D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée sur le segment d'extrémités a_n et a (contenu dans $[1, +\infty[$) : $|f(a_n) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|a_n - a|$. Or $a_{n+1} - a = (1 + f(a_n)) - (1 + f(a)) = f(a_n) - f(a)$, donc $|a_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|a_n - a|$.
- (b) **Initialisation** : pour $n = 0$, $|a_0 - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |a_0 - a|$ est vraie (égalité). **Hérédité** : supposons $|a_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a|$ pour un $n \in \mathbb{N}$. D'après (a), $|a_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|a_n - a| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a_0 - a|$. **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a|$.
- (c) Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a| = 0$. Par encadrement ($0 \leq |a_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a|$), $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n - a| = 0$, donc la suite (a_n) est convergente, de limite a .

Analyse

Solution 2.

1. (a) La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $[0; 1]$, donc F est la primitive de cette fonction qui s'annule en 0 : F est dérivable sur $[0; 1]$ (donc continue) et $F'(x) = e^{x^2} > 0$ pour tout $x \in [0; 1]$. Donc F est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$.
- (b) F est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$, donc elle réalise une bijection de $[0; 1]$ sur $F([0; 1]) = [F(0), F(1)]$. Or $F(0) = 0$ et $F(1) = \int_0^1 e^{t^2} dt = \beta$. Donc F est une bijection de $[0; 1]$ vers $[0; \beta]$.
2. (a) F^{-1} est continue sur $[0; \beta]$ (bijection réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle). On reconnaît une somme de Riemann : pour une fonction g continue sur $[0; \beta]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta}{n} \sum_{k=1}^n g\left(k \frac{\beta}{n}\right) = \int_0^\beta g(t) dt.$$

Ici $S_n = \frac{1}{\beta} \times \frac{\beta}{n} \sum_{k=1}^n F^{-1}\left(k \frac{\beta}{n}\right)$, donc (S_n) converge et

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta F^{-1}(t) dt.$$

(b) Posons $u = F^{-1}(t)$, c'est-à-dire $t = F(u)$. F est de classe C^1 sur $[0; 1]$ et $dt = F'(u) du = e^{u^2} du$; quand $t = 0$, $u = F^{-1}(0) = 0$ et quand $t = \beta$, $u = F^{-1}(\beta) = 1$. Par changement de variable :

$$\int_0^\beta F^{-1}(t) dt = \int_0^1 u e^{u^2} du, \quad \text{donc} \quad \ell = \frac{1}{\beta} \int_0^1 u e^{u^2} du.$$

(c) $u \mapsto \frac{1}{2}e^{u^2}$ est une primitive de $u \mapsto ue^{u^2}$ (dérivée de $e^{u^2} : 2ue^{u^2}$). Donc $\int_0^1 ue^{u^2} du = \left[\frac{1}{2}e^{u^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$, et

$$\ell = \frac{e-1}{2\beta}.$$

Nombres complexes

Solution 3.

Partie I.

- (a) $\Delta = (-2i)^2 - 4 \times 1 \times \alpha = -4 - 4\alpha = -4(1 + \alpha)$.
(b) L'équation du second degré (E_α) admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $\Delta \neq 0$, soit $1 + \alpha \neq 0$. L'ensemble cherché est $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$.
- D'après les relations entre coefficients et racines : $z_1 + z_2 = -\frac{-2i}{1} = 2i$ et $z_1 z_2 = \frac{\alpha}{1} = \alpha$.

Partie II.

- (a) Si $\alpha = m^2 - 2m$, alors $\Delta = -4(m^2 - 2m + 1) = -4(m-1)^2 = (2i(m-1))^2$. Les solutions sont $z = \frac{2i \pm 2i(m-1)}{2} = i \pm i(m-1)$, soit

$$z_1 = im \quad \text{et} \quad z_2 = i(2-m).$$

(Vérification : $z_1 + z_2 = 2i$ et $z_1 z_2 = -m(2-m) = m^2 - 2m = \alpha$.)

- (b) m étant réel, $z_1 = im$ et $z_2 = i(2-m)$ sont imaginaires purs : les points M_1 et M_2 appartiennent à l'axe des imaginaires $(O, \vec{v})$, qui passe par O . Donc O, M_1 et M_2 sont alignés.
- Les points O, M_1, M_2 n'étant pas alignés, $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$.
(a) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$ avec $|z_2|^2$ réel strictement positif. Donc $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)}{|z_2|^2}$, et $\frac{z_1}{z_2}$ est imaginaire pur si et seulement si $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0$.
(b) Pour tous complexes z_1, z_2 :

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2),$$

car $\bar{z}_1 z_2 = \overline{z_1 \bar{z}_2}$ et $w + \bar{w} = 2 \operatorname{Re}(w)$. De même $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$. En soustrayant :

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 - 4 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2).$$

- (c) Comme $z_1 + z_2 = 2i$, $|z_1 + z_2|^2 = 4$ et (b) donne $|z_1 - z_2|^2 = 4 - 4 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$. Donc $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0 \iff |z_1 - z_2|^2 = 4 \iff |z_1 - z_2| = 2$ (un module est positif). Avec (a) : $\frac{z_1}{z_2}$ est imaginaire pur si et seulement si $|z_1 - z_2| = 2$.
- (a) $(z_1 - z_2)^2 = (z_1 + z_2)^2 - 4z_1 z_2 = (2i)^2 - 4\alpha = -4 - 4\alpha = \Delta$.
(b) Le triangle $OM_1 M_2$ est rectangle en O si et seulement si M_1, M_2 sont distincts de O et $(\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_1}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, c'est-à-dire si et seulement si $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur non nul. D'après 2.(c), cela équivaut (les points n'étant pas alignés) à $|z_1 - z_2| = 2$, soit $|(z_1 - z_2)^2| = 4$, soit d'après (a) $|\Delta| = 4$, soit $4|1 + \alpha| = 4$:

$$|\alpha - (-1)| = 1.$$

Cette condition signifie $\Omega A = 1$ où A est le point d'affixe -1 . Réciproquement, si $|\alpha + 1| = 1$ et $\alpha \neq 0$, alors $\Delta \neq 0$, $z_1 z_2 = \alpha \neq 0$ et $|z_1 - z_2| = 2$, donc $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur non nul et le triangle est rectangle en O ; si $\alpha = 0$ (qui vérifie $|\alpha + 1| = 1$), les solutions sont 0 et $2i$ et le triangle est aplati. Donc Γ est le cercle de centre $A(-1)$ et de rayon 1 , privé du point O .

Structures algébriques

Solution 4.

1. (a) $(i, 2)T(1, i) = (i \times \bar{i} + 1, 2 \times i) = (i \times (-i) + 1, 2i) = (1 + 1, 2i) = (2, 2i)$.
 $(1, i)T(i, 2) = (1 \times \bar{2} + i, i \times 2) = (2 + i, 2i)$.
 (b) $(i, 2)T(1, i) = (2, 2i) \neq (2 + i, 2i) = (1, i)T(i, 2)$: la loi T n'est pas commutative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.
2. Soient $(a, b), (c, d), (e, f)$ dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

$$((a, b)T(c, d))T(e, f) = (a\bar{d} + c, bd)T(e, f) = ((a\bar{d} + c)\bar{f} + e, bdf) = (a\bar{d}\bar{f} + c\bar{f} + e, bdf).$$

$$(a, b)T((c, d)T(e, f)) = (a, b)T(c\bar{f} + e, df) = (a\overline{c\bar{f} + e} + b, bdf) = (a\bar{c}\bar{f} + c\bar{f} + e, bdf),$$

car $\overline{df} = \bar{d}\bar{f}$. Les deux résultats sont égaux : T est associative.

3. $(0, 1) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$: $(a, b)T(0, 1) = (a \times \bar{1} + 0, b \times 1) = (a, b)$ et $(0, 1)T(a, b) = (0 \times \bar{b} + a, 1 \times b) = (a, b)$. Donc $(0, 1)$ est l'élément neutre de T .
4. (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Comme $b \neq 0$, $(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et, puisque $\frac{1}{b} = \frac{1}{b}$:

$$(a, b)T\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) = \left(a \times \frac{1}{b} - \frac{a}{b}, b \times \frac{1}{b}\right) = (0, 1).$$

(b) La loi T est interne dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ (car $a\bar{d} + c \in \mathbb{C}$ et $bd \in \mathbb{C}^*$ comme produit de deux complexes non nuls), associative (question 2), admet $(0, 1)$ pour élément neutre (question 3). Enfin tout élément (a, b) admet un symétrique : d'après (a), $(a, b)T(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}) = (0, 1)$, et aussi

$$\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)T(a, b) = \left(-\frac{a}{b} \times \bar{b} + a, \frac{1}{b} \times b\right) = (0, 1).$$

Donc $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$ est un groupe, et il est non commutatif d'après 1.(b). Le symétrique de (a, b) est $(a, b)' = (-\frac{a}{b}, \frac{1}{b})$.

5. (a) Soient (a, b) et (c, d) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Comme d est réel, $\bar{d} = d$ et $(a, b)T(c, d) = (ad + c, bd)$ avec $ad + c \in \mathbb{R}$ et $bd \in \mathbb{R}^*$ (produit de deux réels non nuls). Donc $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est stable par T .
 (b) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ contient l'élément neutre $(0, 1)$. Il est stable par T d'après (a). Enfin, si $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, son symétrique $(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}) = (-\frac{a}{b}, \frac{1}{b})$ appartient à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Donc $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$.

Arithmétique

Solution 5.

1. (a) p est premier et r est premier avec p , donc p ne divise pas r . D'après le petit théorème de Fermat, $r^{p-1} \equiv 1[p]$, c'est-à-dire p divise $r^{p-1} - 1$. De même, q premier ne divisant pas r donne $r^{q-1} \equiv 1[q]$: q divise $r^{q-1} - 1$.
 (b) $r^{(p-1)(q-1)} = (r^{p-1})^{q-1} \equiv 1^{q-1} = 1[p]$, donc p divise $r^{(p-1)(q-1)} - 1$. De même $r^{(p-1)(q-1)} = (r^{q-1})^{p-1} \equiv 1^{p-1} = 1[q]$, donc q divise $r^{(p-1)(q-1)} - 1$.
 (c) p et q sont deux nombres premiers distincts, donc ils sont premiers entre eux. Comme p et q divisent tous deux $N = r^{(p-1)(q-1)} - 1$, le théorème de Gauss donne : $p \mid N$ et $q \mid N$ avec $p \wedge q = 1$, donc $N = pk$ avec $q \mid pk$ et $q \wedge p = 1$, d'où $q \mid k$, et $pq \mid N$. Donc pq divise $r^{(p-1)(q-1)} - 1$.
2. Appliquons la question 1 avec $p = 13$, $q = 17$ (premiers distincts) et $r = 2024$: $2024 = 13 \times 155 + 9$ et $2024 = 17 \times 119 + 1$, donc 13 et 17 ne divisent pas 2024, et 2024 est premier avec 13 et avec 17. Comme $(p-1)(q-1) = 12 \times 16 = 192$, la question 1.(c) donne $13 \times 17 = 221$ divise $2024^{192} - 1$, soit $2024^{192} \equiv 1[221]$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{Z}$: $2024^{192}x \equiv x[221]$, et

$$2024^{192}x \equiv 3[221] \iff x \equiv 3[221].$$

L'ensemble des solutions est $\{3 + 221k; k \in \mathbb{Z}\}$.