

Examen national : Mathématiques

Session de rattrapage 2023 (épreuve officielle RS 24F)

Durée : 4 heures. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.

L'épreuve comporte quatre exercices indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat. L'exercice 1 se rapporte à l'analyse (10 pts), l'exercice 2 aux nombres complexes (3,5 pts), l'exercice 3 aux structures algébriques (3,5 pts) et l'exercice 4 à l'arithmétique (3 pts). . L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

Analyse

Exercice 1 (10 points). Partie I. Pour tout entier naturel non nul n , on considère la fonction f_n définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$f_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad (\forall x \in]0, +\infty[); \quad f_n(x) = \sqrt{x}(\ln x)^n$$

et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Vérifier que : $(\forall x \in]0, +\infty[); \sqrt{x}(\ln x)^n = (2n)^n \left(x^{\frac{1}{2n}} \ln \left(x^{\frac{1}{2n}} \right) \right)^n$, en déduire que f_n est continue à droite en 0. (0,5 pt)
- (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$. (0,25 pt)
- (c) Vérifier que : $(\forall x \in]0, +\infty[); \frac{f_n(x)}{x} = (2n)^n \left(\frac{\ln \left(x^{\frac{1}{2n}} \right)}{x^{\frac{1}{2n}}} \right)^n$, en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. (0,75 pt)
- (d) Calculer, suivant la parité de n , $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. (0,5 pt)
2. (a) Montrer que f_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que : $(\forall x \in]0, +\infty[); f'_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1}(2n + \ln x)$. (0,75 pt)
- (b) Vérifier que : $\forall n \geq 2, f'_n(x) = 0$ si et seulement si $(x = 1 \text{ ou } x = e^{-2n})$. (0,25 pt)
- (c) Étudier, suivant la parité de n , le sens de variation de f_n et donner son tableau de variations. (1 pt)
- (d) Montrer que si n est impair et $n \geq 3$ alors le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de (C_n) . (0,25 pt)

Partie II.

1. Soit $\beta \in]1, e[$ un réel fixé. On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = f_n(\beta)$.
 - (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 0 < u_n < \sqrt{e}$. (0,25 pt)
 - (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. (0,25 pt)
 - (c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (0,25 pt)
2. (a) Montrer que pour tout entier n non nul, il existe un unique réel $x_n \in]1; e[$ tel que : $f_n(x_n) = 1$. (0,5 pt)

(b) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi définie est croissante, en déduire qu'elle est convergente. (0,75 pt)

3. On pose : $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

(a) Montrer que : $1 < \ell \leq e$. (0,5 pt)

(b) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln x_n)^n = \frac{1}{\sqrt{\ell}}$. (0,25 pt)

(c) Montrer que si $\ell < e$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(\ln x_n) = -\infty$. (0,25 pt)

(d) En déduire la valeur de ℓ . (0,25 pt)

Partie III. On pose pour tout $x \in I$, $F(x) = \int_x^1 (f_1(t))^2 dt$.

1. (a) Montrer que la fonction F est continue sur I . (0,25 pt)

(b) En utilisant une double intégration par parties, montrer que : (1 pt)

$$(\forall x \in]0, +\infty[); \quad F(x) = -\frac{x^2}{2} \ln^2(x) + \frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{1}{4}(1 - x^2).$$

2. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$. (0,5 pt)

(b) En déduire la valeur de $F(0)$. (0,25 pt)

(c) Calculer, en cm^3 , le volume du solide engendré par la rotation d'un tour complet autour de l'axe des abscisses de la portion de la courbe (C_1) relative à l'intervalle $[0, 1]$ (on prendra $\|i\| = 1 \text{ cm}$). (0,5 pt)

Nombres complexes

Exercice 2 (3.5 points). Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment.

Partie I. On considère dans $\mathbb{R}_+^2$ le système suivant :

$$(S) : \quad \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x+y} \right) = \frac{12}{5} \quad \text{et} \quad \sqrt{y} \left(1 - \frac{1}{x+y} \right) = \frac{4}{5}$$

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ une solution du système (S) . On pose : $z = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$.

(a) Montrer que : $z + \frac{1}{z} = \frac{12}{5} + \frac{4}{5}i$. (0,25 pt)

(b) Montrer que : $z^2 - \left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i \right)z + 1 = 0$, en déduire les valeurs possibles de z (on remarque que : $\frac{28}{25} + \frac{96}{25}i = \left(\frac{2}{5}(4 + 3i) \right)^2$). (0,75 pt)

(c) En déduire les valeurs du couple (x, y) . (0,25 pt)

2. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^2$ le système (S) . (0,5 pt)

Partie II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit (U) le cercle de centre O et de rayon 1 et $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du cercle (U) deux à deux distincts.

1. Montrer que : $(\forall z \in \mathbb{C}^*) ; |z| = 1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$. (0,25 pt)

2. (a) La droite passant par A et parallèle à (BC) coupe le cercle (U) au point $P(p)$. Montrer que : $p = \frac{bc}{a}$. (0,5 pt)

(b) La droite passant par A et perpendiculaire à (BC) coupe le cercle (U) au point $Q(q)$. Montrer que : $q = -p$. (0,5 pt)

(c) La droite passant par C et parallèle à (AB) coupe le cercle (U) au point $R(r)$. Montrer que les deux droites (PR) et (OB) sont perpendiculaires. (0,5 pt)

Structures algébriques

Exercice 3 (3.5 points). On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire et non commutatif d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $E = \{M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} / (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. Montrer que E est un sous-groupe de $(M_3(\mathbb{R}), +)$. (0,25 pt)
2. On munit l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ de la loi de composition interne $*$ définie par : $\forall ((x, z), (x', z')) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{C})^2 ; (x, z) * (x', z') = (x + x', z + z')$ et on considère l'application φ définie de E vers $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ par : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \varphi(M(a, b, c)) = (a, b + ci)$.
 - (a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(E, +)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, *)$ et que $\varphi(E) = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$. (0,5 pt)
 - (b) En déduire que $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, *)$ est un groupe commutatif. (0,25 pt)
3. On munit $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ de la loi de composition interne T définie par : $\forall ((x, z), (x', z')) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{C})^2 ; (x, z)T(x', z') = (x \operatorname{Re}(z') + x' \operatorname{Re}(z), zz')$ ($\operatorname{Re}(z)$ désigne la partie réelle du nombre complexe z).
 - (a) Montrer que T est commutative. (0,25 pt)
 - (b) Vérifier que $(0, 1)$ est l'élément neutre de T dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$. (0,25 pt)
 - (c) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, (1, i)T(x, -i) = (0, 1)$; en déduire que T est non associative dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$. (0,5 pt)
4. Soit $G = \{(\operatorname{Im}(z), z) / z \in \mathbb{C}\}$ ($\operatorname{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire du nombre complexe z).
 - (a) Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, *)$ (on remarque que $(-\operatorname{Im}(z), -z)$ est la symétrique de $(\operatorname{Im}(z), z)$ pour la loi $*$). (0,25 pt)
 - (b) Soit ψ l'application définie de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ par : $\forall z \in \mathbb{C}^* ; \psi(z) = (\operatorname{Im}(z), z)$. Montrer que ψ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, T)$. (0,25 pt)
 - (c) En déduire que $(G - \{(0, 0)\}, T)$ est un groupe commutatif. (0,5 pt)
5. Montrer que $(G, *, T)$ est un corps commutatif. (0,5 pt)

Arithmétique

Exercice 4 (3 points). Soit p un nombre premier impair. On pose : $S = 1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^{p-1}$. Soit q un nombre premier qui divise S .

1. (a) Montrer que p et q sont premiers entre eux. (0,5 pt)
 - (b) En déduire que : $p^{q-1} \equiv 1[q]$. (0,25 pt)
 - (c) Vérifier que : $p^p - 1 = (p - 1)S$, en déduire que : $p^p \equiv 1[q]$. (0,5 pt)
2. On suppose que p et $q - 1$ sont premiers entre eux.
 - (a) En utilisant le théorème de Bézout, montrer que : $p \equiv 1[q]$. (0,75 pt)
 - (b) En déduire que $S \equiv 1[q]$. (0,25 pt)
3. Montrer que : $q \equiv 1[p]$. (0,75 pt)