

Examen national : Corrigé

Session de rattrapage 2023 (épreuve officielle RS 24F)

Analyse

Solution 1.

Partie I.

1. (a) Pour $x > 0$, posons $X = x^{\frac{1}{2n}}$; alors $X^n = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ et $\ln X = \frac{1}{2n} \ln x$. Donc

$$(2n)^n (X \ln X)^n = (2n)^n X^n (\ln X)^n = (2n)^n \sqrt{x} \left(\frac{1}{2n} \right)^n (\ln x)^n = \sqrt{x} (\ln x)^n.$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, $X = x^{\frac{1}{2n}} \rightarrow 0^+$ et $\lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln X = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = (2n)^n \times 0^n = 0 = f_n(0)$: f_n est continue à droite en 0.

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^n = +\infty$ (car $\ln x \rightarrow +\infty$ et $n \geq 1$), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.

(c) Avec la même notation $X = x^{\frac{1}{2n}}$: $(2n)^n (\ln \frac{X}{X})^n = (2n)^n \left(\frac{1}{2n} \right)^n \frac{(\ln x)^n}{X^n} = \frac{(\ln x)^n}{\sqrt{x}} = \frac{f_n(x)}{x}$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln \frac{X}{X} = 0$ (croissances comparées), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n = +\infty$, la courbe (C_n) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

(d) Pour $x > 0$: $\frac{f_n(x)}{x} = \frac{(\ln x)^n}{\sqrt{x}}$. Quand $x \rightarrow 0^+$, $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$ et $(\ln x)^n \rightarrow +\infty$ si n est pair, $-\infty$ si n est impair (car $\ln x \rightarrow -\infty$). Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x)}{x} = +\infty$ si n est pair et $-\infty$ si n est impair. Comme $f_n(0) = 0$, ce quotient est le taux d'accroissement de f_n en 0 : f_n n'est pas dérivable à droite en 0 et (C_n) admet au point O une demi-tangente verticale, dirigée vers le haut si n est pair et vers le bas si n est impair.

2. (a) f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit de $x \mapsto \sqrt{x}$ et de $x \mapsto (\ln x)^n$, toutes deux dérivables sur $]0, +\infty[$. Pour $x > 0$:

$$f'_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x)^n + \sqrt{x} \cdot n (\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{(\ln x)^n}{2\sqrt{x}} + \frac{2n(\ln x)^{n-1}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x)^{n-1} (2n + \ln x).$$

(b) Pour $n \geq 2$, $n-1 \geq 1$ et $f'_n(x) = 0 \iff (\ln x)^{n-1} = 0$ ou $2n + \ln x = 0 \iff \ln x = 0$ ou $\ln x = -2n \iff x = 1$ ou $x = e^{-2n}$.

(c) Le signe de $f'_n(x)$ est celui de $(\ln x)^{n-1} (2n + \ln x)$, avec $2n + \ln x < 0 \iff x < e^{-2n}$ et $e^{-2n} < 1$. Cas n pair : $n-1$ est impair, donc $(\ln x)^{n-1}$ a le signe de $\ln x$. Sur $]0, e^{-2n}[$: $\ln x < 0$ et $2n + \ln x < 0$, donc $f'_n(x) > 0$; sur $]e^{-2n}, 1[$: $\ln x < 0$ et $2n + \ln x > 0$, donc $f'_n(x) < 0$; sur $]1, +\infty[$: les deux facteurs sont positifs, $f'_n(x) > 0$. Ainsi f_n est croissante sur $[0, e^{-2n}]$, décroissante sur $[e^{-2n}, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$, avec $f_n(0) = 0$, $f_n(e^{-2n}) = e^{-n}(-2n)^n = \left(\frac{2n}{e}\right)^n$, $f_n(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n = +\infty$. Cas n impair : $n-1$ est pair, donc $(\ln x)^{n-1} \geq 0$ (et vaut 1 si $n = 1$) ; $f'_n(x)$ a le signe de $2n + \ln x$: négatif sur $]0, e^{-2n}[$, positif sur $]e^{-2n}, +\infty[$. Ainsi f_n est décroissante sur $[0, e^{-2n}]$ et croissante sur $[e^{-2n}, +\infty[$, avec

$f_n(0) = 0$, $f_n(e^{-2n}) = e^{-n}(-2n)^n = -\left(\frac{2n}{e}\right)^n$ (minimum), $f_n(1) = 0$ et $\lim_{+\infty} f_n = +\infty$.
 (d) Sur $]0, +\infty[$, $f'_n(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(2n(\ln x)^{n-1} + (\ln x)^n)$ est dérivable et

$$f''_n(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}(2n(\ln x)^{n-1} + (\ln x)^n) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x}(2n(n-1)(\ln x)^{n-2} + n(\ln x)^{n-1}),$$

soit, en mettant $\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ en facteur : $f''_n(x) = \frac{1}{4x\sqrt{x}}(-2n(\ln x)^{n-1} - (\ln x)^n + 4n(n-1)(\ln x)^{n-2} + 2n(\ln x)^{n-1}) = \frac{(\ln x)^{n-2}}{4x\sqrt{x}}(4n(n-1) - (\ln x)^2)$. Si n est impair et $n \geq 3$, alors $n-2$ est impair et $n-2 \geq 1$: $(\ln x)^{n-2}$ change de signe en $x = 1$ (négatif avant, positif après), tandis que $4n(n-1) - (\ln x)^2 > 0$ au voisinage de 1 (il vaut $4n(n-1) > 0$ en 1) et $4x\sqrt{x} > 0$. Donc f''_n s'annule en 1 en changeant de signe : le point d'abscisse 1 (c'est le point $(1; 0)$) est un point d'inflexion de (C_n) .

Partie II.

- $u_n = \sqrt{\beta}(\ln \beta)^n$. Comme $1 < \beta < e$, on a $0 < \ln \beta < 1$, donc $0 < (\ln \beta)^n < 1$, et $1 < \sqrt{\beta} < \sqrt{e}$. Par produit, $0 < u_n < \sqrt{e}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - $u_{n+1} = \sqrt{\beta}(\ln \beta)^{n+1} = u_n \ln \beta$, avec $u_n > 0$ et $0 < \ln \beta < 1$, donc $u_{n+1} < u_n$: la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est (strictement) décroissante.
 - (u_n) est géométrique de raison $\ln \beta \in]0, 1[$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après I.2.c, f_n est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ (quelle que soit la parité de n , $f'_n > 0$ sur $]1, +\infty[$). Elle réalise donc une bijection de $[1, e]$ sur $[f_n(1), f_n(e)] = [0, \sqrt{e}]$ (car $f_n(e) = \sqrt{e} \cdot 1^n = \sqrt{e}$). Comme $0 < 1 < \sqrt{e}$, il existe un unique $x_n \in [1, e]$ tel que $f_n(x_n) = 1$, et $x_n \in]1, e[$ car $f_n(1) = 0 \neq 1$ et $f_n(e) = \sqrt{e} \neq 1$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f_{n+1}(x_n) = \sqrt{x_n}(\ln x_n)^{n+1} = f_n(x_n) \ln x_n = \ln x_n < 1 = f_{n+1}(x_{n+1})$ car $x_n < e$. Comme f_{n+1} est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et que $x_n, x_{n+1} \in [1, e]$, on en déduit $x_n < x_{n+1}$: la suite (x_n) est strictement croissante. Elle est majorée par e , donc convergente (théorème de la convergence monotone).
- La suite est croissante, donc $x_n \geq x_1 > 1$ pour tout $n \geq 1$, et par passage à la limite $\ell \geq x_1 > 1$. De plus $x_n < e$ pour tout n , donc $\ell \leq e$. Ainsi $1 < \ell \leq e$.
 - De $f_n(x_n) = 1$ on tire $(\ln x_n)^n = \frac{1}{\sqrt{x_n}}$. Comme $x_n \rightarrow \ell > 0$ et que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue en ℓ , $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln x_n)^n = \frac{1}{\sqrt{\ell}}$.
 - Supposons $\ell < e$. Alors $\ln x_n \rightarrow \ln \ell$ avec $0 < \ln \ell < 1$ (car $1 < \ell < e$), donc $\ln(\ln x_n) \rightarrow \ln(\ln \ell) < 0$ par continuité de $\ln$. Ainsi $n \ln(\ln x_n)$ est le produit de $n \rightarrow +\infty$ par une suite de limite strictement négative : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(\ln x_n) = -\infty$.
 - Si $\ell < e$, alors $(\ln x_n)^n = e^{n \ln(\ln x_n)} \rightarrow e^{-\infty} = 0$ d'après (c) (notons que $\ln x_n > 0$), ce qui contredit (b) puisque $\frac{1}{\sqrt{\ell}} \neq 0$. Donc $\ell = e$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = e$.

Partie III.

- f_1 est continue sur I (continue à droite en 0 d'après I.1.a et continue sur $]0, +\infty[$), donc $(f_1)^2$ est continue sur I et admet une primitive H sur I ; $F(x) = H(1) - H(x)$ est alors dérivable, donc continue, sur I .
 - Soit $x > 0$; $F(x) = \int_x^1 t(\ln t)^2 dt$. Première intégration par parties avec $u(t) = (\ln t)^2$, $u'(t) = \frac{2 \ln t}{t}$, $v'(t) = t$, $v(t) = \frac{t^2}{2}$ (fonctions de classe C^1 sur $[x, 1]$) :

$$F(x) = \left[\frac{t^2}{2} (\ln t)^2 \right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^2}{2} \cdot \frac{2 \ln t}{t} dt = -\frac{x^2}{2} \ln^2(x) - \int_x^1 t \ln t dt.$$

Deuxième intégration par parties avec $u(t) = \ln t$, $u'(t) = \frac{1}{t}$, $v'(t) = t$, $v(t) = \frac{t^2}{2}$:

$$\int_x^1 t \ln t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t}{2} \, dt = -\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4}(1 - x^2).$$

Donc $F(x) = -\frac{x^2}{2} \ln^2(x) + \frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{1}{4}(1 - x^2)$.

2. (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln^2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x)^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot (x \ln x) = 0$ (car $x \ln x \rightarrow 0$). Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{1}{4}$.
- (b) F est continue sur I , donc continue à droite en 0 : $F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{1}{4}$. Autrement dit $\int_0^1 t(\ln t)^2 \, dt = \frac{1}{4}$.
- (c) Le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la portion de (C_1) d'abscisses dans $[0, 1]$ autour de l'axe des abscisses est $V = \pi \int_0^1 (f_1(t))^2 \, dt = \pi F(0) = \frac{\pi}{4}$ en unités de volume. L'unité étant 1 cm, $V = \frac{\pi}{4} \text{ cm}^3 \approx 0,785 \text{ cm}^3$.

Nombres complexes

Solution 2.

Partie I.

1. (a) Le système impose $x + y \neq 0$, donc $z = \sqrt{x} + i\sqrt{y} \neq 0$ et $|z|^2 = x + y$. Alors $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\sqrt{x} - i\sqrt{y}}{x + y}$ et

$$z + \frac{1}{z} = \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x + y} \right) + i\sqrt{y} \left(1 - \frac{1}{x + y} \right) = \frac{12}{5} + \frac{4}{5}i$$

puisque (x, y) est solution de (S) .

- (b) En multipliant l'égalité précédente par $z \neq 0$: $z^2 + 1 = \left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i\right)z$, soit $z^2 - \left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i\right)z + 1 = 0$. Discriminant :

$$\Delta = \left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i\right)^2 - 4 = \frac{144}{25} - \frac{16}{25} + \frac{96}{25}i - \frac{100}{25} = \frac{28}{25} + \frac{96}{25}i = \left(\frac{2}{5}(4 + 3i)\right)^2 = \left(\frac{8}{5} + \frac{6}{5}i\right)^2.$$

Les solutions sont $z = \frac{(\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i) \pm (\frac{8}{5} + \frac{6}{5}i)}{2}$, soit $z_1 = \frac{4+2i}{2} = 2 + i$ et $z_2 = \frac{\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i}{2} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$. Les valeurs possibles de z sont $2 + i$ et $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$.

- (c) $z = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$ a une partie imaginaire $\sqrt{y} \geq 0$, ce qui exclut z_2 . Donc $z = 2 + i$, d'où $\sqrt{x} = 2$ et $\sqrt{y} = 1$: $(x, y) = (4, 1)$.

2. D'après 1, si (S) a une solution, c'est nécessairement $(4, 1)$. Réciproquement, pour $(x, y) = (4, 1)$: $x + y = 5$, $\sqrt{4}(1 + \frac{1}{5}) = 2 \times \frac{6}{5} = \frac{12}{5}$ et $\sqrt{1}(1 - \frac{1}{5}) = \frac{4}{5}$. Le couple $(4, 1)$ est solution. L'ensemble des solutions de (S) dans $\mathbb{R}_+^2$ est $\{(4, 1)\}$.

Partie II.

1. Pour $z \in \mathbb{C}^*$: $|z| = 1 \iff |z|^2 = 1 \iff z\bar{z} = 1 \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$ (on divise par $z \neq 0$).
2. Les affixes a, b, c, p, q, r sont de module 1, donc d'après 1 : $\bar{a} = \frac{1}{a}$, $\bar{b} = \frac{1}{b}$, etc.
 - (a) P est le point de (U) , distinct de A , tel que $(AP) \parallel (BC)$ (si la parallèle est tangente en A , on convient que $P = A$; on traite le cas $P \neq A$). Le parallélisme se traduit par $\frac{p-a}{c-b} \in \mathbb{R}$ (avec $c \neq b$), c'est-à-dire $\frac{p-a}{c-b} = \overline{\left(\frac{p-a}{c-b}\right)}$. Or

$$\overline{\left(\frac{p-a}{c-b}\right)} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}} = \frac{\frac{a-p}{ap}}{\frac{b-c}{bc}} = \frac{(a-p)bc}{ap(b-c)} = \frac{(p-a)bc}{ap(c-b)}.$$

L'égalité $\frac{p-a}{c-b} = \frac{(p-a)bc}{ap(c-b)}$ avec $p \neq a$ donne, après division par $\frac{p-a}{c-b} \neq 0 : 1 = \frac{bc}{ap}$, soit $p = \frac{bc}{a}$. (Réciproquement, $\frac{bc}{a}$ est bien de module 1 et rend le quotient réel, donc c'est l'abscisse du second point d'intersection ; si $\frac{bc}{a} = a$, la parallèle est tangente en A .)

(b) De même, avec $Q \neq A : (AQ) \perp (BC)$ se traduit par $\frac{q-a}{c-b} \in i\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\frac{q-a}{c-b} = -\overline{\left(\frac{q-a}{c-b}\right)} = -\frac{(q-a)bc}{aq(c-b)}$ (même calcul qu'en (a)). Après division par $\frac{q-a}{c-b} \neq 0 : 1 = -\frac{bc}{aq}$, soit $q = -\frac{bc}{a} = -p$.

(c) En appliquant (a) avec C à la place de A et (AB) à la place de $(BC) : r = \frac{ab}{c}$. Alors

$$r - p = \frac{ab}{c} - \frac{bc}{a} = b \frac{a^2 - c^2}{ac}, \quad \text{donc} \quad \frac{r - p}{b - 0} = \frac{a^2 - c^2}{ac} = \frac{a}{c} - \frac{c}{a}.$$

Or $\overline{\frac{a}{c} - \frac{c}{a}} = \frac{\bar{a}}{\bar{c}} - \frac{\bar{c}}{\bar{a}} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{c}} - \frac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{a}} = \frac{c}{a} - \frac{a}{c} = -\left(\frac{a}{c} - \frac{c}{a}\right)$, donc $\frac{r-p}{b}$ est un imaginaire pur. Il est non nul dès que $a^2 \neq c^2$, c'est-à-dire $P \neq R$ (le cas $c = -a$ donne $P = R =$ point d'abscisse $-b$, où les droites sont confondues avec un point). Ainsi $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{PR}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$: les droites (PR) et (OB) sont perpendiculaires.

Structures algébriques

Solution 3.

1. $E \subset M_3(\mathbb{R})$ et la matrice nulle $M(0, 0, 0)$ appartient à E . Pour $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$:

$$M(a, b, c) - M(a', b', c') = \begin{pmatrix} a - a' & 0 & 0 \\ 0 & b - b' & -(c - c') \\ 0 & c - c' & b - b' \end{pmatrix} = M(a - a', b - b', c - c') \in E.$$

Donc E est un sous-groupe de $(M_3(\mathbb{R}), +)$.

2. (a) Pour $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{R}^3 : M(a, b, c) + M(a', b', c') = M(a + a', b + b', c + c')$, donc

$$\varphi(M(a, b, c) + M(a', b', c')) = (a + a', (b + b') + (c + c')i) = (a, b + ci) * (a', b' + c'i) = \varphi(M(a, b, c)) * \varphi(M(a', b', c')).$$

φ est un homomorphisme de $(E, +)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, *)$. De plus $\varphi(E) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ et, pour tout $(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, en posant $b = \operatorname{Re}(z)$ et $c = \operatorname{Im}(z)$, on a $z = b + ci$ et $\varphi(M(x, b, c)) = (x, z) : \varphi$ est surjective, donc $\varphi(E) = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

(b) $(E, +)$ est un groupe commutatif (sous-groupe du groupe commutatif $(M_3(\mathbb{R}), +)$) et l'image d'un groupe commutatif par un homomorphisme est un groupe commutatif pour la loi d'arrivée. Donc $(\varphi(E), *) = (\mathbb{R} \times \mathbb{C}, *)$ est un groupe commutatif (d'élément neutre $\varphi(0) = (0, 0)$, le symétrique de (x, z) étant $(-x, -z)$).

3. (a) $(x', z')T(x, z) = (x' \operatorname{Re}(z) + x \operatorname{Re}(z'), z'z) = (x \operatorname{Re}(z') + x' \operatorname{Re}(z), zz') = (x, z)T(x', z')$ (commutativité de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$). T est commutative.

(b) $(x, z)T(0, 1) = (x \operatorname{Re}(1) + 0 \times \operatorname{Re}(z), z \times 1) = (x, z)$, et par commutativité $(0, 1)T(x, z) = (x, z)$. Donc $(0, 1)$ est l'élément neutre de T .

(c) Pour $x \in \mathbb{R} : (1, i)T(x, -i) = (1 \times \operatorname{Re}(-i) + x \operatorname{Re}(i), i \times (-i)) = (0 + 0, 1) = (0, 1)$. Si T était associative, alors pour $x \neq x' : ((x, -i)T(1, i))T(x', -i) = (0, 1)T(x', -i) = (x', -i)$ et $(x, -i)T((1, i)T(x', -i)) = (x, -i)T(0, 1) = (x, -i)$ seraient égaux, ce qui est faux. Donc T n'est pas associative dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$. (Autre formulation : $(1, i)$ aurait une infinité de symétriques, ce qui est impossible pour une loi associative avec élément neutre.)

4. (a) $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ et $(0, 0) = (\text{Im}(0), 0) \in G$. Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, le symétrique de $(\text{Im}(z'), z')$ pour $*$ est $(-\text{Im}(z'), -z') = (\text{Im}(-z'), -z')$ et

$$(\text{Im}(z), z) * (\text{Im}(-z'), -z') = (\text{Im}(z) + \text{Im}(-z'), z - z') = (\text{Im}(z - z'), z - z') \in G.$$

Donc G est un sous-groupe de $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, *)$.

(b) Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ dans $\mathbb{C}^*$ (x, y, x', y' réels). $\psi(z)T\psi(z') = (\text{Im}(z) \text{Re}(z') + \text{Im}(z') \text{Re}(z), zz') = (yx' + y'x, zz')$. Or $zz' = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$, donc $\text{Im}(zz') = xy' + yx'$ et $\psi(zz') = (\text{Im}(zz'), zz') = (yx' + y'x, zz') = \psi(z)T\psi(z')$. ψ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, T)$.

(c) $\psi(\mathbb{C}^*) = \{(\text{Im}(z), z) / z \in \mathbb{C}^*\}$. Comme $(\text{Im}(z), z) = (0, 0) \iff z = 0$, on a $\psi(\mathbb{C}^*) = G - \{(0, 0)\}$. $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif et ψ est un homomorphisme, donc son image $(G - \{(0, 0)\}, T)$ est un groupe commutatif. Détaillons, puisque T n'est pas associative sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ tout entier : pour $z, z', z'' \in \mathbb{C}^*$, $\psi(z)T\psi(z') = \psi(zz') \in G - \{(0, 0)\}$ (stabilité) ; $(\psi(z)T\psi(z'))T\psi(z'') = \psi(zz'z'') = \psi(z)T(\psi(z')T\psi(z''))$ (associativité) ; $\psi(1) = (0, 1)$ est neutre ; $\psi(z)T\psi(\frac{1}{z}) = \psi(1) = (0, 1)$ (symétrique de $\psi(z) : \psi(\frac{1}{z})$) ; $\psi(z)T\psi(z') = \psi(zz') = \psi(z'z) = \psi(z')T\psi(z)$ (commutativité).

5. D'après 4.a, $(G, *)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre $(0, 0)$. D'après 4.c, $(G - \{(0, 0)\}, T)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $(0, 1)$; de plus T est interne dans G tout entier car $(\text{Im}(z), z)T(0, 0) = (0, 0) \in G$, et l'associativité de T dans G reste vraie lorsqu'un des éléments est $(0, 0)$ (les deux membres valent alors $(0, 0)$, car $gT(0, 0) = (0, 0)$ pour tout $g \in G$). Reste la distributivité de T par rapport à $*$ dans G : pour $g = (\text{Im}(z), z)$, $g' = (\text{Im}(z'), z')$, $g'' = (\text{Im}(z''), z'')$ dans G :

$$gT(g' * g'') = (\text{Im}(z) \text{Re}(z' + z'') + \text{Im}(z' + z'') \text{Re}(z), z(z' + z''))$$

$$= (\text{Im}(z) \text{Re}(z') + \text{Im}(z') \text{Re}(z), zz') * (\text{Im}(z) \text{Re}(z'') + \text{Im}(z'') \text{Re}(z), zz'') = (gTg') * (gTg''),$$

par linéarité de Re et Im ; la distributivité à droite en découle par commutativité de T .
Donc $(G, *, T)$ est un corps commutatif (il est isomorphe à $(\mathbb{C}, +, \times)$ via $z \mapsto (\text{Im}(z), z)$).

Arithmétique

Solution 4.

- (a) $S = 1 + p(1 + p + \dots + p^{p-2})$, donc $S \equiv 1[p]$ et p ne divise pas S . Si q et p n'étaient pas premiers entre eux, comme ce sont deux nombres premiers on aurait $q = p$, et alors p diviserait S : contradiction. Donc p et q sont premiers entre eux.
(b) q est premier et ne divise pas p (question a), donc d'après le petit théorème de Fermat : $p^{q-1} \equiv 1[q]$.
(c) $(p-1)S = (p-1)(1 + p + p^2 + \dots + p^{p-1}) = p^p - 1$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison $p \neq 1$: $S = \frac{p^p - 1}{p - 1}$). Comme q divise S , q divise $(p-1)S = p^p - 1$, donc $p^p \equiv 1[q]$.
- (a) Comme $p \wedge (q-1) = 1$, le théorème de Bézout donne $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $pu + (q-1)v = 1$. Remarquons que S est impair (somme de p termes impairs, p impair), donc $q \neq 2$ et $q-1 \geq 2$; ainsi $u \neq 0$ et $v \neq 0$ (sinon $q-1$ ou p diviserait 1), et u, v sont de signes contraires (car $pu + (q-1)v = 1 > 0$ avec $p, q-1 \geq 2$ interdit deux entiers non nuls de même signe :

deux positifs donneraient une somme ≥ 4 , deux négatifs une somme < 0). Premier cas : $u > 0$ et $v < 0$. Alors $pu = 1 + (q-1)(-v)$ avec $-v \in \mathbb{N}$, donc $p^{pu} = p \cdot (p^{q-1})^{-v}$. Or $p^{pu} = (p^p)^u \equiv 1[q]$ (1.c) et $(p^{q-1})^{-v} \equiv 1[q]$ (1.b), d'où $1 \equiv p[q]$. Second cas : $u < 0$ et $v > 0$. Alors $(q-1)v = 1 + p(-u)$ avec $-u \in \mathbb{N}$, donc $p^{(q-1)v} = p \cdot (p^p)^{-u}$; le membre de gauche est $\equiv 1[q]$ et $(p^p)^{-u} \equiv 1[q]$, d'où $1 \equiv p[q]$. Dans les deux cas, $p \equiv 1[q]$.

(b) Si $p \equiv 1[q]$, alors $p^k \equiv 1[q]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $S = \sum_{k=0}^{p-1} p^k \equiv \sum_{k=0}^{p-1} 1 = p \equiv 1[q]$. Ainsi $S \equiv 1[q]$.

3. Raisonnons par l'absurde : si p et $q-1$ étaient premiers entre eux, la question 2 donnerait $S \equiv 1[q]$; or q divise S , donc $S \equiv 0[q]$, d'où q divise 1, ce qui est absurde. Donc $p \wedge (q-1) \neq 1$. Comme p est premier, ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p , donc $p \wedge (q-1) = p$, c'est-à-dire p divise $q-1$: $q \equiv 1[p]$. (Exemples : $p = 3$, $S = 13$ et $13 \equiv 1[3]$; $p = 5$, $S = 781 = 11 \times 71$ et $11 \equiv 71 \equiv 1[5]$.)