

Examen national : Mathématiques

Session normale 2023 (épreuve officielle NS 24F)

Durée : 4 heures. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.

L'épreuve comporte cinq exercices indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat. Les exercices 1 et 2 se rapportent à l'analyse (7,75 pts et 2,25 pts), l'exercice 3 aux nombres complexes (3,5 pts), l'exercice 4 à l'arithmétique (3 pts) et l'exercice 5 aux structures algébriques (3,5 pts). L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

Analyse

Exercice 1 (7.75 points). Partie I.

- (a) Montrer que : $\forall t \in [0, +\infty[; \frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right)$. (0,5 pt)
 (b) En déduire que : $\forall x \in [0, +\infty[; \frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)$. (0,5 pt)
- Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.
 Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)-1}{x} = -\frac{1}{2}$. (0,5 pt)

Partie II. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[; \quad f(x) = g(x)e^{-x}.$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. (0,5 pt)
- (a) Montrer que f est continue à droite en 0. (0,25 pt)
 (b) Vérifier que : $\forall x \in]0, +\infty[; \frac{f(x)-1}{x} = \left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right)g(x) + \left(\frac{g(x)-1}{x}\right)$. (0,25 pt)
 (c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et déterminer $f'_d(0)$. (0,5 pt)
- Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis que : (0,75 pt)

$$\forall x \in]0, +\infty[; \quad f'(x) = \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{-x}.$$

- (a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[; -\frac{3}{2} < \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$. (0,5 pt)
 (b) En déduire que : $\forall x \in]0, +\infty[; -\frac{3}{2} < f'(x) < 0$. (0,25 pt)
- (a) Dresser le tableau de variations de f . (0,25 pt)
 (b) Construire la courbe (C) en faisant apparaître la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0 (on prendra $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$). (0,75 pt)

Partie III.

- Montrer que l'équation d'inconnue x : $f(x) = 3x$, admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$. (0,5 pt)
- Soient $\beta \in \mathbb{R}^+$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$u_0 = \beta \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}f(u_n).$$

- (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \geq 0$. (0,5 pt)
 (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. (0,5 pt)
 (c) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}; |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$. (0,5 pt)
 (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α . (0,25 pt)

Analyse

Exercice 2 (2.25 points). On considère la fonction numérique : $x \mapsto e^x$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0; 1; \dots; n\}$, on note M_k le point de la courbe (Γ) de coordonnées $\left(\frac{k}{n}; e^{\frac{k}{n}}\right)$.

1. (a) Montrer que : $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}; \exists c_k \in]\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}[$ tel que : $e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}e^{c_k}$. (0,5 pt)
 (b) Montrer que : $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}; M_k M_{k+1} = \frac{1}{n}\sqrt{1 + e^{2c_k}}$ ($M_k M_{k+1}$ désigne la distance de M_k à M_{k+1}). (0,25 pt)
 (c) En déduire que : $\forall k \in \{0; 1; \dots; (n-1)\}; \frac{1}{n}\sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq M_k M_{k+1} \leq \frac{1}{n}\sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$. (0,5 pt)
 2. Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*; S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$.
 (a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq S_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}$. (0,5 pt)
 (b) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx$. (0,5 pt)

Nombres complexes

Exercice 3 (3.5 points). On considère le nombre complexe : $u = 1 + (2 - \sqrt{3})i$.

1. (a) Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes : $1 - i$ et $1 + \sqrt{3}i$. (0,5 pt)
 (b) Montrer que : $\frac{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$. (0,25 pt)
 (c) En déduire que : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$. (0,25 pt)
 (d) Montrer que : $u = (\sqrt{6} - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$. (0,5 pt)
 2. On considère les deux suites numériques $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}); \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n - (2 - \sqrt{3})y_n \\ y_{n+1} = (2 - \sqrt{3})x_n + y_n \end{cases}$$

- (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n + iy_n = u^n$. (0,5 pt)
 (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \frac{\cos(\frac{n\pi}{12})}{(\cos(\frac{\pi}{12}))^n}$ et $y_n = \frac{\sin(\frac{n\pi}{12})}{(\cos(\frac{\pi}{12}))^n}$. (0,5 pt)
 3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe u^n .
 (a) Déterminer les entiers n pour lesquels les points O , A_0 et A_n sont alignés. (0,5 pt)
 (b) Montrer que pour tout entier n , le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_n . (0,5 pt)

Arithmétique

Exercice 4 (3 points). Soit p un nombre premier impair. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $x^2 \equiv 2[p]$.

- (a) Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1[p]$. (0,25 pt)
(b) En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1[p]$ (on remarque que : $(2^{\frac{p-1}{2}} - 1)(2^{\frac{p-1}{2}} + 1) = 2^{p-1} - 1$). (0,25 pt)
- Soit x une solution de l'équation (E) .
(a) Montrer que p et x sont premiers entre eux. (0,5 pt)
(b) En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$ (on pourra utiliser le théorème de Fermat). (0,5 pt)
- Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, p divise C_p^k (on rappelle que : $(\forall k \in \{1, 2, \dots, p-1\})$ $C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ et que : $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$). (0,25 pt)
- (a) En utilisant la formule de Moivre, montrer que : $(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}} \cos(p\frac{\pi}{4}) + i2^{\frac{p}{2}} \sin(p\frac{\pi}{4})$ (i étant le nombre complexe tel que : $i^2 = -1$). (0,25 pt)
(b) On admet que : $(1+i)^p = \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} + i \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k+1}$. Montrer que : $2^{\frac{p}{2}} \cos(p\frac{\pi}{4}) \in \mathbb{Z}$ et $2^{\frac{p}{2}} \cos(p\frac{\pi}{4}) \equiv 1[p]$ (on pourra utiliser la question 3). (0,5 pt)
- En déduire que si $p \equiv 5[8]$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$. (0,5 pt)

Structures algébriques

Exercice 5 (3.5 points). On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau non commutatif de zéro la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

On considère l'ensemble $E = \{M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Partie I.

- Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$. (0,5 pt)
- Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$. (0,25 pt)
- (a) Vérifier que : $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$; $M(x, y) \times M(x', y') = M(xx' + 3yy', xy' + yx')$. (0,25 pt)
(b) En déduire que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire. (0,5 pt)
- (a) Vérifier que : $M(\sqrt{3}, 1) \times M(-\sqrt{3}, 1) = O$. (0,25 pt)
(b) En déduire que $(E, +, \times)$ n'est pas un corps. (0,25 pt)

Partie II. Soient $F = \{x + y\sqrt{3} / (x, y) \in \mathbb{Q}^2\}$ et $G = \{M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / (x, y) \in \mathbb{Q}^2\}$.

- Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2$; $x + y\sqrt{3} = 0$ si et seulement si $(x = 0 \text{ et } y = 0)$. (0,25 pt)
- Montrer que $F - \{0\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$. (0,25 pt)
- Soit φ l'application définie de $F - \{0\}$ vers E par : $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2 - \{(0, 0)\}$; $\varphi(x + y\sqrt{3}) = M(x, y)$.
(a) Vérifier que : $\varphi(F - \{0\}) = G - \{O\}$. (0,25 pt)
(b) Montrer que φ est un homomorphisme de $(F - \{0\}, \times)$ vers $(E, \times)$. (0,25 pt)
(c) En déduire que $(G - \{O\}, \times)$ est un groupe commutatif. (0,25 pt)
- Montrer que $(G, +, \times)$ est un corps commutatif. (0,25 pt)