

Examen national : Corrigé

Session normale 2023 (épreuve officielle NS 24F)

Analyse

Solution 1.

Partie I.

1. (a) Soit $t \geq 0$. Première inégalité : $\frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \Leftrightarrow 4(1+t) \leq (2+t)^2$ (les dénominateurs sont strictement positifs) $\Leftrightarrow 4 + 4t \leq 4 + 4t + t^2 \Leftrightarrow 0 \leq t^2$, ce qui est vrai. Deuxième inégalité : $\frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right) \Leftrightarrow 2(1+t) \leq (1+t)^2 + 1$ (on multiplie par $2(1+t)^2 > 0$) $\Leftrightarrow 0 \leq (1+t)^2 - 2(1+t) + 1 = t^2$, ce qui est vrai. D'où l'encadrement pour tout $t \in [0, +\infty[$.
- (b) Soit $x \geq 0$. Les trois fonctions de l'encadrement précédent sont continues sur $[0, x]$; par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^x \frac{4}{(2+t)^2} dt \leq \int_0^x \frac{dt}{1+t} \leq \frac{1}{2} \int_0^x \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right) dt.$$

- Or $\int_0^x \frac{4}{(2+t)^2} dt = \left[-\frac{4}{2+t}\right]_0^x = 2 - \frac{4}{2+x} = \frac{2x}{2+x}$, $\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x)$ et $\frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{1+t}\right]_0^x = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{1+x} + 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x(1+x)+1}{1+x} = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)$. D'où $\frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)$.
2. Pour $x > 0$: $\frac{g(x)-1}{x} = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$. D'après 1.b : $\frac{2x}{2+x} - x \leq \ln(1+x) - x \leq \frac{x^2+2x}{2(1+x)} - x$, soit $-\frac{x^2}{2+x} \leq \ln(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{2(1+x)}$ (car $\frac{2x}{2+x} - x = \frac{2x-2x-x^2}{2+x}$ et $\frac{x^2+2x-2x-2x^2}{2(1+x)} = -\frac{x^2}{2(1+x)}$). En divisant par $x^2 > 0$:

$$-\frac{1}{2+x} \leq \frac{g(x)-1}{x} \leq -\frac{1}{2(1+x)}.$$

Les deux bornes tendent vers $-\frac{1}{2}$ quand $x \rightarrow 0^+$; par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)-1}{x} = -\frac{1}{2}$.

Partie II.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$ (car $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x)}{1+x} \cdot \frac{1+x}{x}$, avec $\frac{\ln(1+x)}{1+x} \rightarrow 0$ par croissances comparées et $\frac{1+x}{x} \rightarrow 1$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: la courbe (C) admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.
2. (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (limite usuelle) et $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0)$: f est continue à droite en 0.
- (b) Pour $x > 0$: $\left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right)g(x) + \frac{g(x)-1}{x} = \frac{g(x)e^{-x}-g(x)+g(x)-1}{x} = \frac{g(x)e^{-x}-1}{x} = \frac{f(x)-1}{x}$.
- (c) Quand $x \rightarrow 0^+$: $\frac{e^{-x}-1}{x} = -\frac{e^{-x}-1}{-x} \rightarrow -1$ (limite usuelle $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u-1}{u} = 1$), $g(x) \rightarrow 1$ et $\frac{g(x)-1}{x} \rightarrow -\frac{1}{2}$ (Partie I). Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = -1 \times 1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$: f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -\frac{3}{2}$.
3. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables (dénominateur non nul), donc $f = g \times \exp(-x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit. Pour $x > 0$:

$$g'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)},$$

$$f'(x) = g'(x)e^{-x} - g(x)e^{-x} = e^{-x} \left(\frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} - \frac{x(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} \right) = \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{-x},$$

car $(1+x)\ln(1+x) + x(1+x)\ln(1+x) = (1+x)(1+x)\ln(1+x) = (1+x)^2 \ln(1+x)$.

4. (a) Soit $x > 0$; le dénominateur $x^2(1+x)$ est strictement positif. Majoration : d'après I.1.b, $\ln(1+x) \geq \frac{2x}{2+x}$, donc $(1+x)^2 \ln(1+x) \geq \frac{2x(1+x)^2}{2+x}$. Or $\frac{2x(1+x)^2}{2+x} > x \iff 2(1+x)^2 > 2+x \iff 2x^2 + 3x > 0$, vrai pour $x > 0$. Donc $x - (1+x)^2 \ln(1+x) < 0$ et le quotient est strictement négatif. Minoration : d'après I.1.b, $\ln(1+x) \leq \frac{x^2+2x}{2(1+x)}$, donc $(1+x)^2 \ln(1+x) \leq \frac{(1+x)(x^2+2x)}{2} = \frac{x^3+3x^2+2x}{2}$. Ainsi

$$x - (1+x)^2 \ln(1+x) \geq x - \frac{x^3+3x^2+2x}{2} = \frac{-x^3-3x^2}{2} > \frac{-3x^3-3x^2}{2} = -\frac{3}{2}x^2(1+x)$$

(car $-x^3 > -3x^3$ pour $x > 0$). En divisant par $x^2(1+x) > 0$: $\frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} > -\frac{3}{2}$.

(b) Pour $x > 0$, notons $Q(x)$ le quotient précédent : $f'(x) = Q(x)e^{-x}$ avec $-\frac{3}{2} < Q(x) < 0$ et $0 < e^{-x} < 1$. Donc $f'(x) < 0$ et $f'(x) = Q(x)e^{-x} > -\frac{3}{2}e^{-x} > -\frac{3}{2}$. Ainsi $-\frac{3}{2} < f'(x) < 0$.

5. (a) $f'(x) < 0$ sur $]0, +\infty[$ et f est continue en 0 : f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, de $f(0) = 1$ vers $\lim_{+\infty} f = 0$.

(b) [Figure : dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm, la courbe (C) part du point $(0; 1)$ avec une demi-tangente à droite de coefficient directeur $-\frac{3}{2}$ (passant par $(0; 1)$ et $(\frac{2}{3}; 0)$), décroît strictement, reste au-dessus de l'axe des abscisses (car $f(x) > 0$) et admet cet axe pour asymptote en $+\infty$. Points : $f(1) = \ln \frac{2}{e} \approx 0,25$, $f(2) = \ln \frac{3}{2e^2} \approx 0,07$.]

Partie III.

1. Soit $h(x) = f(x) - 3x$ sur $]0, +\infty[$. h est continue sur $]0, +\infty[$ et strictement décroissante (somme de f strictement décroissante et de $x \mapsto -3x$ strictement décroissante). $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = f(0) - 0 = 1 > 0$ (continuité à droite en 0) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0 - \infty = -\infty$. Donc h réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $] -\infty, 1[$, qui contient 0 : l'équation $h(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = 3x$, admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$. (Numériquement $\alpha \approx 0,24$.) On note que $\alpha = \frac{1}{3}f(\alpha)$.

2. (a) Pour $x > 0$, $g(x) > 0$ (car $\ln(1+x) > 0$) et $e^{-x} > 0$, donc $f(x) > 0$; de plus $f(0) = 1 > 0$. Ainsi $f \geq 0$ sur $[0, +\infty[$. Par récurrence : $u_0 = \beta \geq 0$; si $u_n \geq 0$, alors $f(u_n)$ est défini et $u_{n+1} = \frac{1}{3}f(u_n) \geq 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \geq 0$.

(b) Soit $\psi(x) = \frac{1}{3}f(x)$ sur $[0, +\infty[$. ψ est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $|\psi'(x)| = \frac{1}{3}|f'(x)| < \frac{1}{2}$ d'après II.4.b, et $\psi(\alpha) = \alpha$. Pour $n \in \mathbb{N}$, u_n et α sont dans $[0, +\infty[$; d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à ψ entre u_n et α :

$$|\psi(u_n) - \psi(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|, \quad \text{soit} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

(c) Initialisation : $|u_0 - \alpha| = |\beta - \alpha| = \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$. Hérité : si $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$, alors d'après (b), $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|\beta - \alpha|$. Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$; $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$.

(d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha| = 0$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$. Comme $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|$, le théorème des gendarmes donne $\lim |u_n - \alpha| = 0$: la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

Analyse

Solution 2.

1. (a) Soit $k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$. La fonction $\exp$ est continue sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ et dérivable sur $] \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} [$; d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_k \in] \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} [$ tel que $e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = (\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}) \exp'(c_k) = \frac{1}{n} e^{c_k}$.
- (b) $M_k(\frac{k}{n}; e^{\frac{k}{n}})$ et $M_{k+1}(\frac{k+1}{n}; e^{\frac{k+1}{n}})$, donc

$$M_k M_{k+1} = \sqrt{\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)^2 + \left(e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} e^{2c_k}} = \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{2c_k}}.$$

- (c) Comme $\frac{k}{n} < c_k < \frac{k+1}{n}$ et que $x \mapsto \sqrt{1 + e^{2x}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (composée de fonctions croissantes) : $\sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq \sqrt{1 + e^{2c_k}} \leq \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$. En multipliant par $\frac{1}{n} > 0$: $\frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq M_k M_{k+1} \leq \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$.
2. (a) En sommant les inégalités de 1.c pour k allant de 0 à $n-1$: $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}} \leq S_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + e^{\frac{2(k+1)}{n}}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + e^{\frac{2k}{n}}}$ (changement d'indice $k+1 \rightarrow k$).
- (b) La fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{1 + e^{2x}}$ est continue sur $[0, 1]$. Les deux sommes $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\frac{k}{n})$ et $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(\frac{k}{n})$ sont des sommes de Riemann de φ sur $[0, 1]$ (subdivision régulière de pas $\frac{1}{n}$), donc elles convergent toutes deux vers $\int_0^1 \varphi(x) dx$ quand $n \rightarrow +\infty$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx$ (c'est la longueur de l'arc de (Γ) entre les abscisses 0 et 1).

Nombres complexes

Solution 3.

1. (a) $|1 - i| = \sqrt{2}$ et $1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} (\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}))$, donc $1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$. $|1 + \sqrt{3}i| = 2$ et $1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, donc $1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.
- (b) $\frac{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}} = e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{12}}$.
- (c) En développant : $(1-i)(1+\sqrt{3}i) = 1 + \sqrt{3}i - i + \sqrt{3} = (1 + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1)i$. Donc $e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, d'où $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. Ainsi

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

- (d) $u = 1 + \tan(\frac{\pi}{12})i = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{12})} (\cos(\frac{\pi}{12}) + i \sin(\frac{\pi}{12})) = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{12})} e^{i\frac{\pi}{12}}$, et $\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{12})} = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1) = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Comme $\sqrt{6} - \sqrt{2} > 0$, on a bien $u = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) e^{i\frac{\pi}{12}}$ (module $\sqrt{6} - \sqrt{2}$, argument $\frac{\pi}{12}$).
2. (a) Initialisation : $x_0 + iy_0 = 1 = u^0$. Hérédité : supposons $x_n + iy_n = u^n$. Alors

$$x_{n+1} + iy_{n+1} = x_n - (2 - \sqrt{3})y_n + i(2 - \sqrt{3})x_n + iy_n = (x_n + iy_n)(1 + (2 - \sqrt{3})i) = u^n \cdot u = u^{n+1}.$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n + iy_n = u^n$.

(b) D'après 1.d, $u^n = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{12}} = \frac{1}{(\cos(\frac{\pi}{12}))^n} (\cos(\frac{n\pi}{12}) + i \sin(\frac{n\pi}{12}))$. Comme x_n et y_n sont réels (récurrence immédiate : ils sont définis à partir de réels par des opérations réelles), l'identification des parties réelle et imaginaire donne $x_n = \frac{\cos(\frac{n\pi}{12})}{(\cos(\frac{\pi}{12}))^n}$ et $y_n = \frac{\sin(\frac{n\pi}{12})}{(\cos(\frac{\pi}{12}))^n}$.

3. (a) A_0 a pour affixe $u^0 = 1 \neq 0$. Les points O , A_0 , A_n sont alignés si et seulement si $\frac{u^n}{1} = u^n \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $y_n = 0$, soit $\sin(\frac{n\pi}{12}) = 0$ (car $(\cos(\frac{\pi}{12}))^n \neq 0$), soit $\frac{n\pi}{12} \equiv 0[\pi]$, soit $n \equiv 0[12]$. Les entiers cherchés sont les multiples de 12 : $n \in \{12m / m \in \mathbb{N}\}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $A_n \neq O$ car $u \neq 0$. On calcule

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{0 - u^n} = \frac{u^n(u - 1)}{-u^n} = 1 - u = -(2 - \sqrt{3})i.$$

Ce quotient est un imaginaire pur non nul, donc $(\overrightarrow{A_n O}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$: le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_n .

Arithmétique

Solution 4.

- (a) p est premier et impair, donc p ne divise pas 2 ; d'après le petit théorème de Fermat, $2^{p-1} \equiv 1[p]$.
(b) p étant impair, $\frac{p-1}{2}$ est un entier naturel et $(2^{\frac{p-1}{2}} - 1)(2^{\frac{p-1}{2}} + 1) = 2^{p-1} - 1 \equiv 0[p]$. Comme p est premier et divise ce produit, il divise l'un des facteurs (lemme d'Euclide) : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1[p]$.
- (a) Si p divisait x , alors p diviserait x^2 , donc $2 = x^2 - (x^2 - 2)$ serait divisible par p (car $p \mid x^2 - 2$), ce qui est impossible car p est un nombre premier impair. Donc p ne divise pas x , et p étant premier, p et x sont premiers entre eux.
(b) $x^2 \equiv 2[p]$ donne, en élevant à la puissance $\frac{p-1}{2}$: $x^{p-1} = (x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}}[p]$. Or p est premier et ne divise pas x , donc d'après le petit théorème de Fermat $x^{p-1} \equiv 1[p]$. Par conséquent $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$.
- Soit $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. On a $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$, donc p divise kC_p^k . Comme $1 \leq k \leq p-1$ et p est premier, p et k sont premiers entre eux ; d'après le théorème de Gauss, p divise C_p^k .
- (a) $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4}))$. D'après la formule de Moivre, $(1 + i)^p = (\sqrt{2})^p (\cos(p\frac{\pi}{4}) + i \sin(p\frac{\pi}{4})) = 2^{\frac{p}{2}} \cos(p\frac{\pi}{4}) + i 2^{\frac{p}{2}} \sin(p\frac{\pi}{4})$.
(b) Les sommes admises sont des entiers relatifs. En identifiant les parties réelles des deux écritures de $(1 + i)^p$ (les C_p^j étant réels) : $2^{\frac{p}{2}} \cos(p\frac{\pi}{4}) = \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} \in \mathbb{Z}$. Dans cette somme, le terme $k = 0$ vaut $C_p^0 = 1$; pour $1 \leq k \leq \frac{p-1}{2}$, on a $2 \leq 2k \leq p-1$, donc p divise C_p^{2k} d'après la question 3. Ainsi $2^{\frac{p}{2}} \cos(p\frac{\pi}{4}) \equiv 1[p]$.
- Supposons $p \equiv 5[8]$: $p = 8m + 5$ avec $m \in \mathbb{N}$. Alors $p\frac{\pi}{4} = 2m\pi + \frac{5\pi}{4}$, donc $\cos(p\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -2^{-\frac{1}{2}}$ et $2^{\frac{p}{2}} \cos(p\frac{\pi}{4}) = -2^{\frac{p}{2}-\frac{1}{2}} = -2^{\frac{p-1}{2}}$. D'après 4.b : $-2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$, soit $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1[p]$. Si l'équation (E) admettait une solution x , on aurait d'après 2.b $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$, d'où $1 \equiv -1[p]$, c'est-à-dire $p \mid 2$, ce qui est absurde car p est impair. Donc si $p \equiv 5[8]$, l'équation $x^2 \equiv 2[p]$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$ (exemples : $p = 5$, $p = 13$, $p = 29$).

Structures algébriques

Solution 5.

Partie I.

1. $E \subset M_2(\mathbb{R})$ et $O = M(0, 0) \in E$, donc $E \neq \emptyset$. Pour $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$:

$$M(x, y) - M(x', y') = \begin{pmatrix} x - x' + y - y' & y - y' \\ 2(y - y') & x - x' - (y - y') \end{pmatrix} = M(x - x', y - y') \in E.$$

Donc E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$.

2. E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$, donc non vide et stable par addition. De plus, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\lambda.M(x, y) = \begin{pmatrix} \lambda x + \lambda y & \lambda y \\ 2\lambda y & \lambda x - \lambda y \end{pmatrix} = M(\lambda x, \lambda y) \in E$. Donc E est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$. (On peut aussi remarquer que $M(x, y) = xI + yM(0, 1)$: E est le sous-espace engendré par I et $M(0, 1)$.)
3. (a) $M(x, y) \times M(x', y') = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'+y' & y' \\ 2y' & x'-y' \end{pmatrix}$. Coefficients : ligne 1 : $(x+y)(x'+y') + 2yy' = (xx' + 3yy') + (xy' + yx')$ et $(x+y)y' + y(x'-y') = xy' + yx'$; ligne 2 : $2y(x'+y') + 2y'(x-y) = 2(xy' + yx')$ et $2yy' + (x-y)(x'-y') = (xx' + 3yy') - (xy' + yx')$. En posant $X = xx' + 3yy'$ et $Y = xy' + yx'$, la matrice obtenue est $\begin{pmatrix} X+Y & Y \\ 2Y & X-Y \end{pmatrix} = M(X, Y)$. Donc $M(x, y) \times M(x', y') = M(xx' + 3yy', xy' + yx')$.
- (b) $(E, +)$ est un groupe commutatif (question 1). D'après (a), E est stable pour $\times$. La multiplication est associative et distributive par rapport à l'addition dans E car elle l'est dans $M_2(\mathbb{R})$. $I = M(1, 0) \in E$ est l'élément unité. Enfin la formule de (a) est symétrique en (x, y) et (x', y') : $M(x', y') \times M(x, y) = M(x'x + 3y'y, x'y + y'x) = M(x, y) \times M(x', y')$. Donc $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.
4. (a) D'après 3.a : $M(\sqrt{3}, 1) \times M(-\sqrt{3}, 1) = M(-3 + 3, \sqrt{3} - \sqrt{3}) = M(0, 0) = O$.
- (b) $M(\sqrt{3}, 1) \neq O$ et $M(-\sqrt{3}, 1) \neq O$ sont deux éléments non nuls de E dont le produit est nul : E possède des diviseurs de zéro. Dans un corps, un produit nul a un facteur nul (tout élément non nul est inversible). Donc $(E, +, \times)$ n'est pas un corps. (Directement : si $M(\sqrt{3}, 1)$ était inversible, en multipliant l'égalité de (a) par son inverse on obtiendrait $M(-\sqrt{3}, 1) = O$, faux.)

Partie II.

1. Si $x = y = 0$ alors $x + y\sqrt{3} = 0$. Réciproquement, soit $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ avec $x + y\sqrt{3} = 0$. Si $y \neq 0$, alors $\sqrt{3} = -\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde car $\sqrt{3}$ est irrationnel. Donc $y = 0$, puis $x = 0$.
2. $F - \{0\} \subset \mathbb{R}^*$ et $1 = 1 + 0\sqrt{3} \in F - \{0\}$. Soient $a = x + y\sqrt{3}$ et $b = x' + y'\sqrt{3}$ deux éléments de $F - \{0\}$ ($(x, y), (x', y') \in \mathbb{Q}^2$ non nuls). D'abord $b' = x' - y'\sqrt{3} \neq 0$ d'après la question 1 (appliquée à $(x', -y')$), et $bb' = x'^2 - 3y'^2 \in \mathbb{Q}^*$. Alors

$$ab^{-1} = \frac{ab'}{bb'} = \frac{(x + y\sqrt{3})(x' - y'\sqrt{3})}{x'^2 - 3y'^2} = \frac{xx' - 3yy'}{x'^2 - 3y'^2} + \frac{yx' - xy'}{x'^2 - 3y'^2}\sqrt{3} \in F,$$

et $ab^{-1} \neq 0$ comme produit de réels non nuls. Donc $ab^{-1} \in F - \{0\}$: $F - \{0\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

3. Remarque préalable : φ est bien définie car l'écriture $x + y\sqrt{3}$ d'un élément de F est unique (si $x + y\sqrt{3} = x' + y'\sqrt{3}$ alors $(x - x') + (y - y')\sqrt{3} = 0$ et la question 1 donne $x = x', y = y'$).
- (a) $\varphi(F - \{0\}) = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{Q}^2 - \{(0, 0)\}\}$. Or $M(x, y) = O \iff (x + y = 0, y = 0, 2y = 0, x - y = 0) \iff x = y = 0$. Donc $\varphi(F - \{0\}) = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{Q}^2\} - \{O\} =$

$G - \{O\}$.

(b) Soient $a = x + y\sqrt{3}$ et $b = x' + y'\sqrt{3}$ dans $F - \{0\}$. $ab = (xx' + 3yy') + (xy' + yx')\sqrt{3}$ avec $(xx' + 3yy', xy' + yx') \in \mathbb{Q}^2$, donc $\varphi(ab) = M(xx' + 3yy', xy' + yx') = M(x, y) \times M(x', y') = \varphi(a) \times \varphi(b)$ (d'après 1.3.a). φ est un homomorphisme de $(F - \{0\}, \times)$ vers $(E, \times)$.

(c) L'image d'un groupe commutatif par un homomorphisme est un groupe commutatif pour la loi d'arrivée. $(F - \{0\}, \times)$ est un groupe commutatif (sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$) et $\varphi(F - \{0\}) = G - \{O\}$, donc $(G - \{O\}, \times)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre $\varphi(1) = M(1, 0) = I$.

4. $G \subset E$ et G est un sous-groupe de $(E, +)$: $I = M(1, 0) \in G$ et $M(x, y) - M(x', y') = M(x - x', y - y') \in G$ pour $(x, y), (x', y') \in \mathbb{Q}^2$. G est stable pour $\times$ ($M(x, y) \times M(x', y') = M(xx' + 3yy', xy' + yx')$ à coefficients rationnels) ; $\times$ est associative, commutative, distributive par rapport à $+$ dans G (car dans E) et $I \in G$. Donc $(G, +, \times)$ est un sous-anneau commutatif unitaire de E . Enfin, d'après 3.c, tout élément non nul de G est inversible dans $G - \{O\}$, donc dans G , avec I pour unité. Ainsi $(G, +, \times)$ est un corps commutatif.