

Examen national : Mathématiques

Session de rattrapage 2022 (épreuve officielle RS 24F)

Durée : 4 heures. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.

L'épreuve comporte quatre exercices indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat. L'exercice 1 se rapporte à l'analyse (10 pts), l'exercice 2 aux nombres complexes (3,5 pts), l'exercice 3 aux structures algébriques (3,5 pts) et l'exercice 4 à l'arithmétique (3 pts). . L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

Analyse

Exercice 1 (10 points). Partie A.

- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 1 + x \leq e^x$. (0,25 pt)
- (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; 0 \leq 1 - e^{-x} \leq x$. (0,25 pt)
 (b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; 0 \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} \leq \frac{x^3}{6}$. (0,5 pt)
 (c) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x-e^{-x}}{x^2} = -\frac{1}{2}$. (0,5 pt)

Partie B. On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad (\forall x \in]0, +\infty[); \quad f(x) = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (a) Montrer que f est continue à droite en 0. (0,5 pt)
 (b) Vérifier que : $(\forall x > 0) ; \frac{f(x)-1}{x} = \frac{1-2x-e^{-2x}}{x^2} - \frac{1-x-e^{-x}}{x^2}$. (0,25 pt)
 (c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que le nombre dérivé à droite en 0 est $(-\frac{3}{2})$. (0,5 pt)
- (a) Montrer que : $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{e^{-2x}}{x^2}(2x + 1 - e^x(1 + x))$. (0,5 pt)
 (b) Montrer que : $(\forall x > 0) ; f'(x) \leq -e^{-2x}$ (on pourra utiliser : $1 + x \leq e^x$). (0,5 pt)
 (c) En déduire le sens de variations de f sur I . (0,25 pt)
- On admet que : $(\forall x > 0) ; f''(x) = \frac{e^{-2x}}{x^3}(-4x^2 - 4x - 2 + e^x(2 + 2x + x^2))$.
 (a) Montrer que : $(\forall x \geq 0) ; 1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x$. (0,25 pt)
 (b) En déduire que : $(\forall x > 0) ; f''(x) > 0$. (0,5 pt)
- On admet que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{3}{2}$.
 (a) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. (0,5 pt)
 (b) En déduire que : $(\forall x \in I) ; |f'(x)| \leq \frac{3}{2}$. (0,5 pt)
- (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. (0,5 pt)
 (b) Dresser le tableau de variations de f . (0,25 pt)
 (c) Déterminer la position relative de la courbe (C) par rapport à sa demi-tangente au point $T(0; 1)$. (0,25 pt)
 (d) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (0,5 pt)

Partie C.

- Pour tout x de $[0; 1]$, on pose : $g(x) = f(x) - x$.
 - Montrer que g est une bijection de $[0; 1]$ vers un intervalle J que l'on déterminera. (0,5 pt)
 - Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0; 1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$. (0,5 pt)
- Pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier $k \in \{0; 1; \dots; n\}$, on considère les nombres réels $x_k = \frac{k\alpha}{n}$ et on pose :

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt \quad \text{et} \quad J_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dt.$$

- Montrer que : $\forall k \in \{0; 1; \dots; n\} ; |J_k - I_k| \leq \frac{3}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k) dt$. (0,5 pt)
 - En déduire que : $\forall k \in \{0; 1; \dots; n\} ; |J_k - I_k| \leq \frac{3}{4} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2$. (0,5 pt)
- On pose : $L = \int_0^\alpha f(t) dt$.
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : \left| \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right) - L \right| \leq \frac{3\alpha^2}{4n}$. (0,5 pt)
 - En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right) = \int_0^\alpha f(t) dt$. (0,25 pt)

Nombres complexes

Exercice 2 (3.5 points). Soit $m \in \mathbb{C} \setminus \{-1; 0; 1\}$.

I. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$(E_m) : mz^2 - (m-1)^2z - (m-1)^2 = 0$$

- Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est : $\Delta = (m^2 - 1)^2$. (0,25 pt)
 - Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m) . (0,5 pt)
- On prend uniquement dans cette question $m = e^{i\theta}$, avec $0 < \theta < \pi$. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle. (0,5 pt)

II. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les deux points A et B d'affixes respectives $m - 1$ et $\frac{1}{m} - 1$.

- Montrer que les points O , A et B sont alignés si et seulement si $m \in \mathbb{R}$. (0,5 pt)
- On suppose que m n'est pas un nombre réel. Soient C l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et D l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AD]$ et $[OB]$.
 - Montrer que l'affixe du point C est : $c = m - 1 + \left(\frac{1}{m} - m\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ et que l'affixe du point D est : $d = (m - 1)e^{i\frac{\pi}{3}}$. (0,5 pt)
 - Montrer que : $2(p - r) = m - 1 + \left(\frac{1}{m} - m\right)(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1)$ et $2(q - r) = (m - 1)e^{i\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{1}{m} - m\right)$. (0,5 pt)
 - Montrer que : $q - r = e^{i\frac{\pi}{3}}(p - r)$. (0,25 pt)
 - Quelle est la nature du triangle PQR ? (justifier votre réponse) (0,5 pt)

Structures algébriques

Exercice 3 (3.5 points). On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (la loi $\times$ étant la multiplication usuelle des matrices).

Pour tout réel a on pose $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & 3 & -1 \\ 2a+3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ et soit $G = \{M(a) / a \in \mathbb{R}\}$.

1. Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ vers $M_3(\mathbb{R})$ définie par : $(\forall a \in \mathbb{R}) ; \varphi(a) = M(a)$.
 - (a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(M_3(\mathbb{R}), \times)$. (0,5 pt)
 - (b) Montrer que $\varphi(\mathbb{R}) = G$, en déduire que $(G, \times)$ est un groupe commutatif. (0,5 pt)
 - (c) Déterminer J l'élément neutre dans $(G, \times)$. (0,5 pt)
 - (d) Déterminer l'inverse de $M(a)$ dans $(G, \times)$. (0,5 pt)
 - (e) Résoudre dans $(G, \times)$ l'équation : $M(1) \times X = M(2)$. (0,5 pt)
2. (a) Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R}) ; M(a) \times J = M(a) \times I$. (0,25 pt)
 - (b) En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $M(a)$ n'est pas inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$. (0,5 pt)
 - (c) Vérifier que les matrices de la forme $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 3 & 0 \\ 3x+5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$, sont des solutions dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ de l'équation : $M(1) \times X = M(2)$. (0,25 pt)

Arithmétique

Exercice 4 (3 points).

1. Montrer que 137 est un nombre premier. (0,5 pt)
2. Déterminer un couple (u, v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $38u + 136v = 2$. (0,5 pt)
3. Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que : $x^{38} \equiv 1[137]$.
 - (a) Montrer que x et 137 sont premiers entre eux. (0,5 pt)
 - (b) Montrer que : $x^{136} \equiv 1[137]$. (0,5 pt)
 - (c) Montrer que : $x^2 \equiv 1[137]$. (0,5 pt)
4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : x^{19} \equiv 1[137]$. (0,5 pt)