

Examen national : Corrigé

Session de rattrapage 2022 (épreuve officielle RS 24F)

Analyse

Solution 1.

Partie A.

- Soit $h(x) = e^x - 1 - x$ sur $\mathbb{R}$. h est dérivable et $h'(x) = e^x - 1$, qui est négatif sur $] -\infty, 0]$ et positif sur $[0, +\infty[$. Donc h est décroissante sur $] -\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$: elle admet un minimum en 0, $h(0) = 0$. Ainsi $h(x) \geq 0$, soit $1 + x \leq e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- (a) Soit $x \geq 0$. En appliquant la question 1 à $-x$: $1 - x \leq e^{-x}$, donc $1 - e^{-x} \leq x$. D'autre part $-x \leq 0$ donne $e^{-x} \leq e^0 = 1$ (croissance de l'exponentielle), donc $1 - e^{-x} \geq 0$. Ainsi $0 \leq 1 - e^{-x} \leq x$.
 (b) Soit $x \geq 0$. Par croissance de l'intégrale sur $[0, x]$ (fonctions continues) : $0 \leq \int_0^x (1 - e^{-t}) dt \leq \int_0^x t dt$, soit $0 \leq x - 1 + e^{-x} \leq \frac{x^2}{2}$. Cet encadrement étant valable pour tout réel positif, on intègre à nouveau sur $[0, x]$: $0 \leq \int_0^x (t - 1 + e^{-t}) dt \leq \int_0^x \frac{t^2}{2} dt$, soit $0 \leq \frac{x^2}{2} - x + 1 - e^{-x} \leq \frac{x^3}{6}$, c'est-à-dire $0 \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} \leq \frac{x^3}{6}$.
 (c) Pour $x > 0$: $1 - x - e^{-x} = (1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}) - \frac{x^2}{2}$, donc d'après (b) : $-\frac{x^2}{2} \leq 1 - x - e^{-x} \leq \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}$. En divisant par $x^2 > 0$: $-\frac{1}{2} \leq \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{6}$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x - e^{-x}}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Partie B.

- (a) Pour $x > 0$: $f(x) = \frac{e^{-x}-1}{x} - \frac{e^{-2x}-1}{x} = -\frac{e^{-x}-1}{x} + 2\frac{e^{-2x}-1}{-2x}$. Comme $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u-1}{u} = 1$, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 + 2 = 1 = f(0)$: f est continue à droite en 0.
 (b) Pour $x > 0$: $\frac{1-2x-e^{-2x}}{x^2} - \frac{1-x-e^{-x}}{x^2} = \frac{-x-e^{-2x}+e^{-x}}{x^2} = \frac{e^{-x}-e^{-2x}-x}{x^2}$, et $\frac{f(x)-1}{x} = \frac{\frac{e^{-x}-e^{-2x}-1}{x}-1}{x} = \frac{e^{-x}-e^{-2x}-x}{x^2}$. D'où l'égalité.
 (c) En posant $X = 2x$: $\frac{1-2x-e^{-2x}}{x^2} = 4\frac{1-X-e^{-X}}{X^2}$, et $X \rightarrow 0^+$ quand $x \rightarrow 0^+$, donc d'après A.2.c cette quantité tend vers $4 \times (-\frac{1}{2}) = -2$. De même $\frac{1-x-e^{-x}}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = -2 - (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$: f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -\frac{3}{2}$.
- (a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ (quotient de fonctions dérivables, dénominateur non nul) et

$$f'(x) = \frac{(-e^{-x} + 2e^{-2x})x - (e^{-x} - e^{-2x})}{x^2} = \frac{e^{-2x}}{x^2}((-e^x + 2)x - e^x + 1) = \frac{e^{-2x}}{x^2}(2x + 1 - e^x(1 + x)).$$
 - Soit $x > 0$. D'après A.1, $e^x \geq 1 + x > 0$, donc $e^x(1 + x) \geq (1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$, d'où $2x + 1 - e^x(1 + x) \leq -x^2$. En multipliant par $\frac{e^{-2x}}{x^2} > 0$: $f'(x) \leq -e^{-2x}$.
 - Pour $x > 0$, $f'(x) \leq -e^{-2x} < 0$. Donc f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, et par continuité à droite en 0, f est strictement décroissante sur $I = [0, +\infty[$.
- (a) Soit $k(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ sur $[0, +\infty[$. $k'(x) = e^x - 1 - x \geq 0$ d'après A.1, donc k est croissante sur $[0, +\infty[$ et $k(x) \geq k(0) = 0$. Ainsi $1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x$ pour tout $x \geq 0$.

(b) Soit $x > 0$. Comme $2 + 2x + x^2 > 0$, d'après (a) : $e^x(2 + 2x + x^2) \geq (1 + x + \frac{x^2}{2})(2 + 2x + x^2) = 2(1 + x + \frac{x^2}{2})^2$. Or $(1 + x + \frac{x^2}{2})^2 = 1 + 2x + 2x^2 + x^3 + \frac{x^4}{4}$, donc

$$e^x(2 + 2x + x^2) - (4x^2 + 4x + 2) \geq 2 + 4x + 4x^2 + 2x^3 + \frac{x^4}{2} - 4x^2 - 4x - 2 = 2x^3 + \frac{x^4}{2} > 0.$$

Comme $\frac{e^{-2x}}{x^3} > 0$, on conclut $f''(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

4. (a) Pour $x > 0$: $f'(x) = \frac{(2x+1)e^{-2x}}{x^2} - \frac{(1+x)e^{-x}}{x^2} = (\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})e^{-2x} - (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x})e^{-x}$. Quand $x \rightarrow +\infty$: $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, $e^{-x} \rightarrow 0$ et $e^{-2x} \rightarrow 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
 (b) D'après 3.b, f' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Pour $x > 0$: $f'(x) > \lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t) = -\frac{3}{2}$ et $f'(x) < \lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = 0$ (une fonction strictement croissante est strictement comprise entre ses limites aux bornes). Donc $-\frac{3}{2} < f'(x) < 0$, soit $|f'(x)| < \frac{3}{2}$ pour $x > 0$; en 0, $|f'_d(0)| = \frac{3}{2}$. Ainsi $(\forall x \in I) ; |f'(x)| \leq \frac{3}{2}$.
5. (a) Pour $x > 0$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-2x}}{x}$ et chaque terme tend vers 0 en $+\infty$ (produit de $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ par une exponentielle qui tend vers 0). Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: la courbe (C) admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.
 (b) Tableau de variations : f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, de $f(0) = 1$ vers 0 (limite en $+\infty$), avec $f'_d(0) = -\frac{3}{2}$ et $f'(x) < 0$ pour $x > 0$.
 (c) La demi-tangente en $T(0; 1)$ a pour équation $y = 1 - \frac{3}{2}x$ ($x \geq 0$). Soit $\psi(x) = f(x) - (1 - \frac{3}{2}x)$ sur I ; ψ est continue sur I , dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $\psi'(x) = f'(x) + \frac{3}{2} > 0$ d'après 4.b. Donc ψ est strictement croissante sur I et $\psi(x) > \psi(0) = 0$ pour $x > 0$. La courbe (C) est au-dessus de sa demi-tangente en T (sur $]0, +\infty[$, avec contact en T).
 (d) [Figure : dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C) part de $T(0; 1)$ avec une demi-tangente de pente $-\frac{3}{2}$, est strictement décroissante et convexe ($f'' > 0$), reste au-dessus de cette demi-tangente et se rapproche de l'axe des abscisses en $+\infty$ (asymptote $y = 0$) en restant au-dessus (car $e^{-x} > e^{-2x}$ pour $x > 0$). Points : $f(1) = e^{-1} - e^{-2} \approx 0,23$, $f(2) = \frac{e^{-2} - e^{-4}}{2} \approx 0,06$.]

Partie C.

1. (a) g est continue sur $[0; 1]$ comme somme de f (continue sur I) et de $x \mapsto -x$, et strictement décroissante comme somme de deux fonctions strictement décroissantes. Donc g est une bijection de $[0; 1]$ vers $J = g([0; 1]) = [g(1), g(0)] = [e^{-1} - e^{-2} - 1, 1]$.
 (b) $e^{-1} - e^{-2} - 1 < 0$ (car $e^{-1} < 1$) et $1 > 0$, donc $0 \in J$. Comme g est une bijection de $[0; 1]$ sur J , il existe un unique $\alpha \in [0; 1]$ tel que $g(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $f(\alpha) = \alpha$. De plus $g(0) = 1 \neq 0$ et $g(1) \neq 0$, donc $\alpha \in]0; 1[$. (Numériquement $\alpha \approx 0,49$.)
2. (a) Soit $k \in \{0; 1; \dots; n\}$. $J_k - I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k) - f(t)) dt$, donc, comme $x_k \leq x_{k+1}$:

$$|J_k - I_k| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt.$$

Or f est continue sur I , dérivable sur $]0, +\infty[$ et $|f'| \leq \frac{3}{2}$ sur I (B.4.b) ; d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $t \in [x_k, x_{k+1}]$: $|f(t) - f(x_k)| \leq \frac{3}{2}|t - x_k| = \frac{3}{2}(t - x_k)$. D'où $|J_k - I_k| \leq \frac{3}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k) dt$.

- (b) $\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k) dt = \left[\frac{(t - x_k)^2}{2} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{n} \right)^2$ car $x_{k+1} - x_k = \frac{\alpha}{n}$. Donc $|J_k - I_k| \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{n} \right)^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{\alpha}{n} \right)^2$.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $J_k = f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = \frac{\alpha}{n} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right)$, donc $\sum_{k=0}^{n-1} J_k = \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right)$. Par la relation de Chasles, $\sum_{k=0}^{n-1} I_k = \int_{x_0}^{x_n} f(t) dt = \int_0^\alpha f(t) dt = L$ (car $x_0 = 0$ et $x_n = \alpha$). Ainsi, par l'inégalité triangulaire et 2.b :

$$\left| \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right) - L \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (J_k - I_k) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |J_k - I_k| \leq n \cdot \frac{3}{4} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 = \frac{3\alpha^2}{4n}.$$

(b) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3\alpha^2}{4n} = 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\alpha}{n}\right) = L = \int_0^\alpha f(t) dt$ (somme de Riemann de f sur $[0, \alpha]$).

Nombres complexes

Solution 2.

I.

- (a) $\Delta = (m-1)^4 + 4m(m-1)^2 = (m-1)^2[(m-1)^2 + 4m] = (m-1)^2(m^2 + 2m + 1) = (m-1)^2(m+1)^2 = (m^2 - 1)^2$.
- (b) Une racine carrée de Δ est $m^2 - 1$; comme $m \neq 0$, les solutions sont

$$z_1 = \frac{(m-1)^2 + (m^2 - 1)}{2m} = \frac{(m-1)(m-1+m+1)}{2m} = \frac{(m-1)2m}{2m} = m-1,$$

$$z_2 = \frac{(m-1)^2 - (m^2 - 1)}{2m} = \frac{(m-1)(m-1-m-1)}{2m} = \frac{-2(m-1)}{2m} = \frac{1-m}{m} = \frac{1}{m} - 1.$$

Ces deux solutions sont distinctes car $\Delta \neq 0$ ($m \neq \pm 1$).

- Avec $m = e^{i\theta}$: $z_1 = e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}) = 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$. Comme $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$, $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ et $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc $z_1 = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\pi}{2}}$. De même $z_2 = \frac{1}{m} - 1 = e^{-i\theta} - 1 = \overline{z_1} = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\theta+\pi}{2}}$.

II.

- A a pour affixe $a = m-1 \neq 0$ (car $m \neq 1$), donc $A \neq O$, et B a pour affixe $b = \frac{1}{m} - 1 = \frac{1-m}{m}$. Les points O, A, B sont alignés si et seulement si $\frac{b}{a} \in \mathbb{R}$. Or $\frac{b}{a} = \frac{\frac{1-m}{m}}{m-1} = -\frac{1}{m}$. Donc O, A, B alignés $\Leftrightarrow -\frac{1}{m} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$ (car $m \neq 0$ et $\frac{1}{m} = \frac{1}{m}$, donc $\frac{1}{m} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$).
- (a) La rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ s'écrit $z' - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - a)$. Donc $c = a + e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a) = m-1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{m} - 1 - m + 1\right) = m-1 + \left(\frac{1}{m} - m\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$. La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ s'écrit $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$, donc $d = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}}$.
- (b) $p = \frac{a+c}{2}$, $q = \frac{a+d}{2}$ et $r = \frac{0+b}{2} = \frac{b}{2}$. Donc

$$2(p-r) = a + c - b = (m-1) + (m-1) + \left(\frac{1}{m} - m\right)e^{i\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{1}{m} - 1\right) = 2m-1 - \frac{1}{m} + \left(\frac{1}{m} - m\right)e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Or $m-1 + \left(\frac{1}{m} - m\right)(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1) = m-1 + \left(\frac{1}{m} - m\right)e^{i\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{m} + m = 2m-1 - \frac{1}{m} + \left(\frac{1}{m} - m\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$: c'est bien $2(p-r)$. De même

$$2(q-r) = a + d - b = (m-1) + (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{1}{m} - 1\right) = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}} + m - \frac{1}{m} = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{1}{m} - m\right).$$

- (c) $e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 2(p-r) = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}} + \left(\frac{1}{m} - m\right)(e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}})$. Or $e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}} = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1$. Donc $e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 2(p-r) = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{1}{m} - m\right) = 2(q-r)$, soit $q-r = e^{i\frac{\pi}{3}}(p-r)$.
- (d) L'égalité $q-r = e^{i\frac{\pi}{3}}(p-r)$ signifie que Q est l'image de P par la rotation de centre R et

d'angle $\frac{\pi}{3}$. Si $P \neq R$, on en déduit $RQ = RP$ (module) et $(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ (argument) : le triangle PQR est isocèle en R avec un angle au sommet de $\frac{\pi}{3}$, donc équilatéral. (Remarque : $P = R$ entraîne $Q = R$; cela ne se produit que pour la valeur particulière $m = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{5\pi}{6}}$, pour laquelle le triangle est réduit à un point ; dans tous les autres cas PQR est équilatéral.)

Structures algébriques

Solution 3.

1. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On calcule $M(a) \times M(b)$:

$$M(a) \times M(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & 3 & -1 \\ 2a+3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+1 & 3 & -1 \\ 2b+3 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b+1 & 3 & -1 \\ 2a+2b+3 & 6 & -2 \end{pmatrix} = M(a+b).$$

En effet, ligne 2 : $(a+1) + 3(b+1) - (2b+3) = a+b+1$, $9-6=3$, $-3+2=-1$; ligne 3 : $(2a+3) + 6(b+1) - 2(2b+3) = 2a+2b+3$, $18-12=6$, $-6+4=-2$. Donc $\varphi(a+b) = \varphi(a) \times \varphi(b)$: φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(M_3(\mathbb{R}), \times)$.

(b) Par définition, $\varphi(\mathbb{R}) = \{\varphi(a) / a \in \mathbb{R}\} = \{M(a) / a \in \mathbb{R}\} = G$. L'image d'un groupe par un homomorphisme est un groupe pour la loi d'arrivée : $(\mathbb{R}, +)$ étant un groupe commutatif, $(G, \times) = (\varphi(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe commutatif. Détaillons : G est stable ($M(a) \times M(b) = M(a+b) \in G$), $\times$ est associative dans $M_3(\mathbb{R})$, $M(0) \in G$ vérifie $M(0) \times M(a) = M(a) \times M(0) = M(a)$, tout $M(a)$ admet $M(-a) \in G$ pour symétrique, et $M(a) \times M(b) = M(a+b) = M(b+a) = M(b) \times M(a)$.

(c) L'élément neutre est $J = \varphi(0) = M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

(d) L'inverse de $M(a)$ dans $(G, \times)$ est $\varphi(-a) = M(-a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & 3 & -1 \\ 3-2a & 6 & -2 \end{pmatrix}$, car $M(a) \times M(-a) = M(0) = J$.

(e) Dans le groupe $(G, \times)$: $M(1) \times X = M(2) \iff X = M(1)^{-1} \times M(2) = M(-1) \times M(2) = M(1)$. La solution est $X = M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

2. (a) D'après 1.a, $M(a) \times J = M(a) \times M(0) = M(a+0) = M(a)$, et $M(a) \times I = M(a)$ (I unité de $M_3(\mathbb{R})$). Donc $M(a) \times J = M(a) \times I$.

(b) Supposons $M(a)$ inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$, d'inverse $M(a)^{-1}$. En multipliant à gauche l'égalité $M(a) \times J = M(a) \times I$ par $M(a)^{-1}$, on obtient $J = I$, ce qui est faux (par exemple le coefficient de la ligne 2, colonne 1 vaut 1 dans J et 0 dans I). Donc pour tout $a \in \mathbb{R}$, $M(a)$ n'est pas inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$.

(c) $M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ et $M(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 7 & 6 & -2 \end{pmatrix}$. Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$M(1) \times X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 3 & 0 \\ 3x+5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2+3(x+2)-(3x+5) & 9-6 & -1 \\ 5+6(x+2)-2(3x+5) & 18-12 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 7 & 6 & -2 \end{pmatrix} = M(2).$$

Les matrices X de cette forme sont donc des solutions de $M(1) \times X = M(2)$ dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ (l'équation a une infinité de solutions, ce qui est cohérent avec la non-inversibilité de $M(1)$).

Arithmétique

Solution 4.

1. $\sqrt{137} < 12$ car $12^2 = 144 > 137$. Les nombres premiers inférieurs à 12 sont 2, 3, 5, 7, 11 : 137 est impair, $1 + 3 + 7 = 11$ n'est pas divisible par 3, 137 ne se termine ni par 0 ni par 5, $137 = 7 \times 19 + 4$ et $137 = 11 \times 12 + 5$. Aucun de ces nombres premiers ne divise 137, donc 137 est premier.
2. Algorithme d'Euclide : $136 = 3 \times 38 + 22$, $38 = 1 \times 22 + 16$, $22 = 1 \times 16 + 6$, $16 = 2 \times 6 + 4$, $6 = 1 \times 4 + 2$, $4 = 2 \times 2$. Donc $38 \wedge 136 = 2$. En remontant : $2 = 6 - 4 = 6 - (16 - 2 \times 6) = 3 \times 6 - 16 = 3(22 - 16) - 16 = 3 \times 22 - 4 \times 16 = 3 \times 22 - 4(38 - 22) = 7 \times 22 - 4 \times 38 = 7(136 - 3 \times 38) - 4 \times 38 = 7 \times 136 - 25 \times 38$. Le couple $(u, v) = (-25, 7)$ convient : $38 \times (-25) + 136 \times 7 = -950 + 952 = 2$.
3. (a) Soit $d = x \wedge 137$. Comme 137 est premier, $d = 1$ ou $d = 137$. Si $d = 137$, alors 137 divise x , donc $x^{38} \equiv 0[137]$, ce qui contredit $x^{38} \equiv 1[137]$ (on aurait $137 \mid 1$). Donc $x \wedge 137 = 1$: x et 137 sont premiers entre eux.
 (b) 137 est premier et ne divise pas x : d'après le petit théorème de Fermat, $x^{136} \equiv 1[137]$.
 (c) D'après la question 2, $952 = 38 \times 25 + 2$ et $952 = 136 \times 7$. Donc $x^{952} = (x^{38})^{25} \times x^2 \equiv 1^{25} \times x^2 = x^2[137]$, et $x^{952} = (x^{136})^7 \equiv 1[137]$. Par conséquent $x^2 \equiv 1[137]$.
4. Soit $x \in \mathbb{Z}$ solution de (E) : $x^{19} \equiv 1[137]$. Alors $x^{38} = (x^{19})^2 \equiv 1[137]$, donc d'après 3.c, $x^2 \equiv 1[137]$. Ainsi $x^{19} = (x^2)^9 \times x \equiv x[137]$, et donc $x \equiv x^{19} \equiv 1[137]$. Réciproquement, si $x \equiv 1[137]$ alors $x^{19} \equiv 1[137]$. L'ensemble des solutions de (E) est $S = \{1 + 137k / k \in \mathbb{Z}\}$.