

Examen national : Mathématiques

Session normale 2022 (épreuve officielle NS 24F)

Durée : 4 heures. L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. La qualité de la rédaction et la précision des justifications sont prises en compte dans la notation.

L'épreuve comporte quatre exercices indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat. L'exercice 1 se rapporte à l'analyse (10 pts), l'exercice 2 aux nombres complexes (3,5 pts), l'exercice 3 à l'arithmétique (3 pts) et l'exercice 4 aux structures algébriques (3,5 pts). . L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

Analyse

Exercice 1 (10 points). Partie A.

- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; 0 \leq 1 - x + x^2 - \frac{1}{x^3+1} \leq x^3$. (0,25 pt)
- En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; 0 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x) \leq \frac{x^4}{4}$. (0,25 pt)

Partie B. On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et pour tout } x \text{ de }]0, +\infty[; \quad f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Montrer que f est continue à droite en 0. (0,5 pt)
 - Montrer que f est dérivable à droite en 0. (0,5 pt)
 - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. (0,5 pt)
- Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) ; f'(x) = -\frac{g(x)}{x^3}$ où $g(x) = x + \frac{x}{x+1} - 2\ln(1+x)$. (0,5 pt)
 - Montrer que : $(\forall x \in I) ; 0 \leq g'(x) \leq x^2$. (0,5 pt)
 - En déduire que : $(\forall x \in I) ; 0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{3}$. (0,25 pt)
 - Déterminer le sens de variation de f sur I . (0,25 pt)
- Dresser le tableau de variation de f . (0,25 pt)
 - Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$ et $\|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$). (0,5 pt)

Partie C.

- Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0; 1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$. (0,5 pt)
- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \frac{1}{3}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$.
 - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in [0; 1]$. (0,5 pt)
 - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)|u_n - \alpha|$. (0,5 pt)
 - Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$. (0,5 pt)
 - En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α . (0,25 pt)

Partie D. Pour tout $x \in I$, on pose : $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$.

- Montrer que la fonction F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in I$. (0,5 pt)

2. (a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[) ; F(x) = 2 \ln 2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x)$. (0,5 pt)
 (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$, puis en déduire que : $\int_0^1 f(t) dt = 2 \ln 2 - 1$. (0,5 pt)
 (c) Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. (0,5 pt)

Partie E. On pose : pour tout k de $\mathbb{N}$, $D_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(t) dt$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} D_k$.

1. (a) Vérifier que : $(\forall k \in \mathbb{N}) ; 0 \leq D_k \leq f(k) - f(k+1)$. (0,25 pt)
 (b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$. (0,5 pt)
 2. (a) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone. (0,25 pt)
 (b) En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. (0,25 pt)
 (c) Montrer que la limite l de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie : $\frac{3}{2} - 2 \ln 2 \leq l \leq \frac{1}{2}$. (0,25 pt)

Nombres complexes

Exercice 2 (3.5 points). Soit m un nombre complexe non nul donné et $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

I. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E_m) : z^2 + mj^2z + m^2j = 0$$

1. Vérifier que : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$. (0,5 pt)
 2. (a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est : $\Delta = [m(1-j)]^2$. (0,25 pt)
 (b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m) . (0,5 pt)
 3. Dans cette question, on suppose que : $m = 1 + i$. Montrer que $(z_1 + z_2)^{2022}$ est un imaginaire pur. (0,5 pt)

II. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit φ la transformation du plan complexe qui à tout point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ tel que : $z' = (1+j)z$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application φ . (0,25 pt)
 2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives m, mj et mj^2 et on note $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$ les images respectives des points A, B et C par l'application φ et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[BA']$, $[CB']$ et $[AC']$.
 (a) Montrer que : $a' = -mj^2$, $b' = -m$ et $c' = -mj$. (0,75 pt)
 (b) Montrer que : $p + qj + rj^2 = 0$. (0,25 pt)
 (c) En déduire que le triangle PQR est équilatéral. (0,5 pt)

Arithmétique

Exercice 3 (3 points). Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1. On considère dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $(E_n) : (x+1)^n - x^n = ny$. Soit (x, y) une solution de l'équation (E_n) dans $\mathbb{N}^2$ et soit p le plus petit diviseur premier de n .

1. (a) Montrer que : $(x+1)^n \equiv x^n [p]$. (0,25 pt)
 (b) Montrer que p est premier avec x et avec $(x+1)$. (0,25 pt)
 (c) En déduire que : $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1} [p]$. (0,25 pt)

2. Montrer que si n est pair, alors l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$. (0,5 pt)
3. On suppose que n est impair.
 - (a) Montrer qu'il existe un couple (u, v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $nu + (p-1)v = 1$ (on rappelle que p est le plus petit diviseur premier de n). (0,5 pt)
 - (b) Soient q et r respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de u par $(p-1)$. Vérifier que : $nr = 1 - (p-1)(v+nq)$. (0,25 pt)
 - (c) On pose : $v' = -(v+nq)$. Montrer que : $v' \geq 0$. (0,5 pt)
 - (d) Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$. (0,5 pt)

Structures algébriques

Exercice 4 (3.5 points). On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire et intègre.

Soit $E = \{M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. (a) Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$. (0,25 pt)
 (b) Vérifier que pour tout a, b, c et d de $\mathbb{Z}$, on a : $M(a, b) \times M(c, d) = M(ac + 3bd, ad + bc)$. (0,25 pt)
 (c) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire. (0,5 pt)
2. Soit φ l'application définie de E vers $\mathbb{Z}$ par : $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 ; \varphi(M(a, b)) = |a^2 - 3b^2|$. Montrer que φ est un homomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{Z}, \times)$. (0,5 pt)
3. Soit $M(a, b) \in E$.
 (a) Montrer que $M(a, b) \times M(a, -b) = (a^2 - 3b^2).I$. (0,25 pt)
 (b) Montrer que si $M(a, b)$ est inversible dans $(E, \times)$ alors $\varphi(M(a, b)) = 1$. (0,5 pt)
 (c) On suppose que $\varphi(M(a, b)) = 1$. Montrer que $M(a, b)$ est inversible dans $(E, \times)$ et préciser son inverse. (0,5 pt)
4. (a) Montrer que : $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 ; \varphi(M(a, b)) = 0 \iff a = b = 0$. (0,25 pt)
 (b) En déduire que l'anneau $(E, +, \times)$ est intègre. (0,25 pt)
 (c) Est-ce que $(E, +, \times)$ est un corps ? Justifier votre réponse. (0,25 pt)