

Examen national : Corrigé

Session normale 2022 (épreuve officielle NS 24F)

Analyse

Solution 1.

Partie A.

1. Pour $x \geq 0$, on réduit au même dénominateur : $(1 - x + x^2)(1 + x) = 1 + x^3$, donc

$$1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} = \frac{1 + x^3 - 1}{x+1} = \frac{x^3}{x+1}.$$

Comme $x^3 \geq 0$ et $x+1 \geq 1$, on a $0 \leq \frac{x^3}{x+1} \leq x^3$. Donc $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leq 1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} \leq x^3$.

2. Soit $x \geq 0$. Les trois fonctions $t \mapsto 0$, $t \mapsto 1 - t + t^2 - \frac{1}{t+1}$ et $t \mapsto t^3$ sont continues sur $[0, x]$ et rangées dans cet ordre d'après la question 1 ; par croissance de l'intégrale (avec $0 \leq x$) :

$$0 \leq \int_0^x \left(1 - t + t^2 - \frac{1}{t+1}\right) dt \leq \int_0^x t^3 dt,$$

c'est-à-dire $0 \leq \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ln(1+t)\right]_0^x \leq \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^x$, soit $0 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x) \leq \frac{x^4}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Partie B.

1. (a) Pour $x > 0$, l'encadrement de A.2 donne $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$; en divisant par $x^2 > 0$:

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{3} \leq f(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4}.$$

Les deux membres extrêmes tendent vers $\frac{1}{2}$ quand $x \rightarrow 0^+$, donc par le théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2} = f(0)$: f est continue à droite en 0.

(b) Pour $x > 0$: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x - \ln(1+x) - \frac{x^2}{2}}{x^3}$. Or $x - \ln(1+x) - \frac{x^2}{2} = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)\right) - \frac{x^3}{3}$, donc d'après A.2 : $-\frac{x^3}{3} \leq x - \ln(1+x) - \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}$, et en divisant par $x^3 > 0$: $-\frac{1}{3} \leq \frac{f(x)-f(0)}{x} \leq -\frac{1}{3} + \frac{x}{4}$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\frac{1}{3}$: f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -\frac{1}{3}$.

(c) Pour $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\frac{\ln(1+x)}{x^2} = \frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \frac{1+x}{x^2}$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$ (croissances comparées, $X = 1+x \rightarrow +\infty$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x^2} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Interprétation : la courbe (C) admet l'axe des abscisses (droite $y = 0$) comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

2. (a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables (dénominateur non nul). Avec $u(x) = x - \ln(1+x)$, $u'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$:

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} \cdot x^2 - 2x(x - \ln(1+x))}{x^4} = \frac{\frac{x^2}{1+x} - 2x + 2\ln(1+x)}{x^3}.$$

Or $\frac{x^2}{1+x} - 2x = \frac{x^2 - 2x - 2x^2}{1+x} = -\frac{x^2 + 2x}{1+x}$ et $x + \frac{x}{x+1} = \frac{x^2 + x + x}{x+1} = \frac{x^2 + 2x}{x+1}$. Donc $\frac{x^2}{1+x} - 2x + 2\ln(1+x) = -\left(x + \frac{x}{x+1} - 2\ln(1+x)\right) = -g(x)$, et $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^3}$ pour tout $x > 0$.

(b) g est dérivable sur I et, pour $x \geq 0$:

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{1+x} = \frac{(x+1)^2 - 2(x+1) + 1}{(x+1)^2} = \frac{((x+1) - 1)^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{(x+1)^2}.$$

Comme $(x+1)^2 \geq 1$, on obtient $0 \leq g'(x) \leq x^2$ pour tout $x \in I$.

(c) Soit $x \in I$. En intégrant l'encadrement précédent sur $[0, x]$ (fonctions continues, bornes dans le bon ordre) : $0 \leq \int_0^x g'(t) dt \leq \int_0^x t^2 dt$, soit $0 \leq g(x) - g(0) \leq \frac{x^3}{3}$. Or $g(0) = 0 + 0 - 2\ln 1 = 0$. Donc $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{3}$ pour tout $x \in I$.

(d) Pour $x > 0$, $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^3} \leq 0$ car $g(x) \geq 0$ et $x^3 > 0$. f est donc décroissante sur $]0, +\infty[$, et comme f est continue à droite en 0, f est décroissante sur $I = [0, +\infty[$.

3. (a) Tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$: $f(0) = \frac{1}{2}$, $f'(x) \leq 0$ sur $]0, +\infty[$ (et $f'_d(0) = -\frac{1}{3}$), f décroît de $\frac{1}{2}$ vers $\lim_{+\infty} f = 0$.

(b) [Figure : dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec 2 cm pour unité, la courbe (C) part du point $(0; \frac{1}{2})$ avec une demi-tangente à droite de coefficient directeur $-\frac{1}{3}$, décroît strictement et se rapproche de l'axe des abscisses (asymptote horizontale $y = 0$) sans le toucher ; $f(1) = 1 - \ln 2 \approx 0,31$, $f(2) = \frac{2 - \ln 3}{4} \approx 0,23$, $f(4) = \frac{4 - \ln 5}{16} \approx 0,15$. La courbe reste au-dessus de l'axe des abscisses car $\ln(1+x) < x$ pour $x > 0$.]

Partie C.

1. Soit $h(x) = f(x) - x$ sur $[0, 1]$. h est continue sur $[0, 1]$ (f est continue sur I) et strictement décroissante comme somme de f décroissante et de $x \mapsto -x$ strictement décroissante. De plus $h(0) = \frac{1}{2} > 0$ et $h(1) = f(1) - 1 = 1 - \ln 2 - 1 = -\ln 2 < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (version bijection), l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0, 1[$: il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$. (Numériquement $\alpha \approx 0,40$.)

2. (a) Par récurrence. $u_0 = \frac{1}{3} \in [0, 1]$. Si $u_n \in [0, 1]$, alors comme f est décroissante sur $[0, 1]$: $f(1) \leq f(u_n) \leq f(0)$, soit $1 - \ln 2 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$, et $[1 - \ln 2, \frac{1}{2}] \subset [0, 1]$ (car $\ln 2 < 1$). Donc $u_{n+1} \in [0, 1]$. Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in [0, 1]$.

(b) Sur $]0, 1[$: $|f'(x)| = \frac{g(x)}{x^3} \leq \frac{\frac{x^3}{3}}{x^3} = \frac{1}{3}$ d'après B.2.c ; de plus $f'_d(0) = -\frac{1}{3}$. La fonction f est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$ avec $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$. Soit $n \in \mathbb{N}$: u_n et α appartiennent à $[0, 1]$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à f entre u_n et α :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha|, \quad \text{c'est-à-dire} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)|u_n - \alpha|.$$

(c) Initialisation : $u_0 = \frac{1}{3}$ et α sont dans $[0, 1]$, donc $|u_0 - \alpha| \leq 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$. Hérédité : si $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$, alors d'après (b) : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$. Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

(d) Comme $0 < \frac{1}{3} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, et $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$: par le théorème des gendarmes, $\lim |u_n - \alpha| = 0$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

Partie D.

1. f est continue sur $I = [0, +\infty[$ (continue sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues, et continue à droite en 0 d'après B.1.a). Elle admet donc une primitive G sur I , et $F(x) =$

$\int_x^1 f(t) dt = G(1) - G(x)$. Ainsi F est dérivable sur I et $F'(x) = -G'(x) = -f(x)$ pour tout $x \in I$.

2. (a) Soit $x > 0$. On intègre par parties sur $[x, 1]$ avec $u(t) = t - \ln(1+t)$, $u'(t) = \frac{t}{1+t}$, $v'(t) = \frac{1}{t^2}$, $v(t) = -\frac{1}{t}$ (u et v sont de classe C^1 sur $[x, 1]$) :

$$F(x) = \left[-\frac{t - \ln(1+t)}{t} \right]_x^1 + \int_x^1 \frac{1}{t} \cdot \frac{t}{1+t} dt = (-1 + \ln 2) + \frac{x - \ln(1+x)}{x} + [\ln(1+t)]_x^1.$$

Donc $F(x) = -1 + \ln 2 + 1 - \frac{\ln(1+x)}{x} + \ln 2 - \ln(1+x) = 2 \ln 2 - (1 + \frac{1}{x}) \ln(1+x)$.

(b) $(1 + \frac{1}{x}) \ln(1+x) = \ln(1+x) + \frac{\ln(1+x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1+x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (limite usuelle). Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 2 \ln 2 - 1$. Or F est dérivable donc continue sur I , en particulier continue à droite en 0 : $F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$. Donc $\int_0^1 f(t) dt = F(0) = 2 \ln 2 - 1$.

(c) Sur $[0, 1]$, $f(x) \geq 0$ (car $\ln(1+x) \leq x$ pour $x \geq 0$, d'après A.2 ou l'inégalité classique). L'aire demandée vaut donc $\int_0^1 f(t) dt$ en unités d'aire, et l'unité d'aire vaut $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}^2$:

$$\mathcal{A} = 4(2 \ln 2 - 1) = (8 \ln 2 - 4) \text{ cm}^2 \approx 1,55 \text{ cm}^2.$$

Partie E.

- (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. f est décroissante sur $[k, k+1]$, donc pour tout $t \in [k, k+1]$: $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$. En intégrant sur $[k, k+1]$ (de longueur 1) : $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$. Donc $0 \leq f(k) - \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) - f(k+1)$, soit $0 \leq D_k \leq f(k) - f(k+1)$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant pour k de 0 à $n-1$: $0 \leq S_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} (f(k) - f(k+1)) = f(0) - f(n)$ (somme télescopique). Or $f(n) \geq 0$, donc $f(0) - f(n) \leq f(0) = \frac{1}{2}$. Ainsi $0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$.
- (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = D_n \geq 0$ d'après 1.a. La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc croissante.
- (b) (S_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$, donc convergente (théorème de la convergence monotone).
- (c) Par passage à la limite dans $S_n \leq \frac{1}{2} : l \leq \frac{1}{2}$. De plus, la suite étant croissante, $S_n \geq S_1 = D_0 = f(0) - \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} - (2 \ln 2 - 1) = \frac{3}{2} - 2 \ln 2$ pour tout $n \geq 1$, d'où par passage à la limite $l \geq \frac{3}{2} - 2 \ln 2$. Conclusion : $\frac{3}{2} - 2 \ln 2 \leq l \leq \frac{1}{2}$ (avec $\frac{3}{2} - 2 \ln 2 \approx 0,11$).

Nombres complexes

Solution 2.

I.

- $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc $j^3 = e^{2i\pi} = 1$. Par ailleurs $j^3 - 1 = (j-1)(1+j+j^2) = 0$ et $j \neq 1$, donc $1+j+j^2 = 0$. (Vérification directe : $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $1+j+j^2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 \cdot i = 0$.)
- (a) $\Delta = (mj^2)^2 - 4m^2j = m^2j^4 - 4m^2j = m^2j - 4m^2j = -3m^2j$ car $j^4 = j^3 \cdot j = j$. D'autre part, $[m(1-j)]^2 = m^2(1-2j+j^2) = m^2(1+j^2-2j) = m^2(-j-2j) = -3m^2j$ car $1+j^2 = -j$. Donc $\Delta = [m(1-j)]^2$.
- (b) Une racine carrée de Δ est $\delta = m(1-j)$, donc les solutions sont

$$z_1 = \frac{-mj^2 + m(1-j)}{2} = m \frac{1-j-j^2}{2} = m \frac{1+1}{2} = m, \quad z_2 = \frac{-mj^2 - m(1-j)}{2} = m \frac{-1+j-j^2}{2} = m \frac{j+j}{2} = mj,$$

en utilisant $-j - j^2 = 1$ et $-1 - j^2 = j$. Vérification : $z_1 + z_2 = m(1 + j) = -mj^2$ et $z_1 z_2 = m^2 j$. Donc $z_1 = m$ et $z_2 = mj$.

3. Avec $m = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$: $z_1 + z_2 = m(1 + j) = -mj^2 = e^{i\pi}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt{2}e^{i(\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{i\frac{31\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$. Donc $(z_1 + z_2)^{2022} = 2^{1011}e^{i\frac{2022 \times 7\pi}{12}}$. Or $\frac{2022 \times 7}{12} = \frac{14154}{12} = 1179 + \frac{1}{2}$, donc $\frac{2022 \times 7\pi}{12} = 1178\pi + \frac{3\pi}{2}$ et $e^{i\frac{2022 \times 7\pi}{12}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$ (car 1178π est un multiple de 2π). Ainsi $(z_1 + z_2)^{2022} = -2^{1011}i$, qui est un imaginaire pur.

II.

- $1 + j = -j^2 = e^{i\pi}e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{7\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$. L'écriture $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$ montre que φ est la rotation de centre O (le seul point fixe, car $z = e^{i\frac{\pi}{3}}z \iff z = 0$) et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- (a) $a' = (1 + j)m = -j^2m = -mj^2$; $b' = (1 + j)mj = -j^2 \cdot mj = -mj^3 = -m$; $c' = (1 + j)mj^2 = -mj^4 = -mj$.
(b) $p = \frac{b+a'}{2} = \frac{mj-mj^2}{2}$, $q = \frac{c+b'}{2} = \frac{mj^2-m}{2}$, $r = \frac{a+c'}{2} = \frac{m-mj}{2}$. Alors

$$p + qj + rj^2 = \frac{m}{2}(j - j^2 + j^3 - j + j^2 - j^3) = 0.$$

- (c) En remplaçant $j = -1 - j^2$ dans $p + qj + rj^2 = 0$: $p - q - qj^2 + rj^2 = 0$, soit $p - q = (q - r)j^2 = -(r - q)j^2 = (r - q)e^{i\frac{\pi}{3}}$ (car $-j^2 = 1 + j = e^{i\frac{\pi}{3}}$). Or $r - q = \frac{m-mj-mj^2+m}{2} = m\frac{2-j-j^2}{2} = \frac{3m}{2} \neq 0$ car $m \neq 0$, donc $Q \neq R$ et

$$\frac{p-q}{r-q} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

On en déduit $|p-q| = |r-q|$, soit $QP = QR$, et $(\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QP}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Le triangle PQR est isocèle en Q avec un angle au sommet de mesure $\frac{\pi}{3}$: il est équilatéral.

Arithmétique

Solution 3.

- (a) p divise n et $(x+1)^n - x^n = ny$, donc p divise $(x+1)^n - x^n$: $(x+1)^n \equiv x^n[p]$.
(b) Supposons que p divise x . Alors $x^n \equiv 0[p]$, donc d'après (a) $(x+1)^n \equiv 0[p]$; p étant premier, p divise $x+1$ (lemme d'Euclide), donc p divise $(x+1) - x = 1$, ce qui est absurde. De même, si p divise $x+1$ alors p divise $(x+1)^n$, donc p divise x^n puis x , donc p divise 1 : absurde. Comme p est premier, ne pas diviser x équivaut à être premier avec x : p est premier avec x et avec $x+1$.
(c) D'après le petit théorème de Fermat, p étant premier et ne divisant ni x ni $x+1$: $x^{p-1} \equiv 1[p]$ et $(x+1)^{p-1} \equiv 1[p]$. Donc $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1}[p]$.
- Supposons n pair et (x, y) solution de (E_n) . Le plus petit diviseur premier de n est alors $p = 2$. D'après 1.c avec $p = 2$: $(x+1)^1 \equiv x^1[2]$, c'est-à-dire 2 divise $(x+1) - x = 1$, ce qui est absurde. (Directement : x et $x+1$ sont de parités différentes, donc $(x+1)^n - x^n$ est impair, alors que ny est pair.) Donc si n est pair, (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.
- (a) Montrons que n et $p-1$ sont premiers entre eux. Soit $d = n \wedge (p-1)$ et supposons $d > 1$; soit p' un diviseur premier de d . Alors p' divise n et p' divise $p-1$, donc $p' \leq p-1 < p$: p' serait un diviseur premier de n strictement plus petit que p , ce qui contredit la définition de p . Donc $n \wedge (p-1) = 1$ (notons que $p-1 \geq 2$ car n impair donne $p \geq 3$). D'après le

théorème de Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $nu + (p-1)v = 1$.

(b) Division euclidienne de u par $p-1$: $u = (p-1)q + r$ avec $0 \leq r < p-1$. Alors

$$nr = nu - n(p-1)q = 1 - (p-1)v - (p-1)nq = 1 - (p-1)(v + nq).$$

(c) D'après (b), $nr = 1 + (p-1)v'$. Comme $n \geq 1$ et $r \geq 0$, on a $nr \geq 0$, donc $(p-1)v' \geq -1$, soit $v' \geq -\frac{1}{p-1}$. Or $p-1 \geq 2$, donc $-\frac{1}{p-1} > -1$ et $v' > -1$; v' étant un entier, $v' \geq 0$.

(d) Supposons que (x, y) est solution de (E_n) . D'après 1.a, $(x+1)^n \equiv x^n[p]$, donc en élevant à la puissance $r \in \mathbb{N}$: $(x+1)^{nr} \equiv x^{nr}[p]$. Or $nr = 1 + (p-1)v'$ avec $v' \in \mathbb{N}$, donc, en utilisant 1.c :

$$(x+1)^{nr} = (x+1) \cdot ((x+1)^{p-1})^{v'} \equiv (x+1) \cdot (x^{p-1})^{v'} = (x+1)x^{(p-1)v'}[p].$$

Comme $x^{nr} = x \cdot x^{(p-1)v'}$, on obtient $x \cdot x^{(p-1)v'} \equiv (x+1)x^{(p-1)v'}[p]$, soit, par différence, $x^{(p-1)v'} \equiv 0[p]$: p divise $x^{(p-1)v'}$. Or p est premier et ne divise pas x , donc p ne divise aucune puissance de x (et $x^0 = 1$ si $v' = 0$) : contradiction. Donc l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$. Conclusion : pour tout $n > 1$, (E_n) n'a pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.

Structures algébriques

Solution 4.

1. (a) $E \subset M_2(\mathbb{R})$ et $E \neq \emptyset$ car $M(0, 0)$ est la matrice nulle. Pour $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$: $M(a, b) - M(c, d) = \begin{pmatrix} a-c & 3(b-d) \\ b-d & a-c \end{pmatrix} = M(a-c, b-d) \in E$ car $(a-c, b-d) \in \mathbb{Z}^2$. Donc E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$.

(b) $M(a, b) \times M(c, d) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+3bd & 3ad+3bc \\ bc+ad & 3bd+ac \end{pmatrix} = M(ac+3bd, ad+bc)$.

(c) $(E, +)$ est un groupe commutatif (sous-groupe du groupe commutatif $(M_2(\mathbb{R}), +)$). D'après (b), E est stable pour $\times$ (car $ac+3bd$ et $ad+bc$ sont entiers). La multiplication est associative et distributive par rapport à l'addition dans E car elle l'est dans $M_2(\mathbb{R})$. $I = M(1, 0) \in E$ est élément neutre. Enfin $M(c, d) \times M(a, b) = M(ca+3db, cb+da) = M(ac+3bd, ad+bc) = M(a, b) \times M(c, d)$: la multiplication est commutative dans E . Donc $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

2. Pour $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$:

$$(a^2 + 3bd)^2 - 3(ad + bc)^2 = a^2c^2 + 6abcd + 9b^2d^2 - 3a^2d^2 - 6abcd - 3b^2c^2 = a^2c^2 - 3a^2d^2 - 3b^2c^2 + 9b^2d^2 = (a^2 - 3b^2)(c^2 - 3d^2)$$

Donc $\varphi(M(a, b) \times M(c, d)) = \varphi(M(ac+3bd, ad+bc)) = |(a^2 - 3b^2)(c^2 - 3d^2)| = |a^2 - 3b^2| \cdot |c^2 - 3d^2| = \varphi(M(a, b)) \times \varphi(M(c, d))$: φ est un homomorphisme de $(E, \times)$ vers $(\mathbb{Z}, \times)$.

3. (a) D'après 1.b : $M(a, b) \times M(a, -b) = M(a^2 - 3b^2, -ab + ba) = M(a^2 - 3b^2, 0) = (a^2 - 3b^2).I$.

(b) Si $M(a, b)$ est inversible dans $(E, \times)$, il existe $M' \in E$ tel que $M(a, b) \times M' = I$. Alors $\varphi(M(a, b)) \times \varphi(M') = \varphi(I) = |1 - 0| = 1$. Comme $\varphi(M(a, b))$ et $\varphi(M')$ sont des entiers naturels dont le produit vaut 1, on a $\varphi(M(a, b)) = 1$.

(c) Supposons $\varphi(M(a, b)) = 1$, et posons $\varepsilon = a^2 - 3b^2 \in \{-1, 1\}$ (donc $\varepsilon^2 = 1$). D'après (a), $M(a, b) \times M(a, -b) = \varepsilon I$, donc $M(a, b) \times (\varepsilon M(a, -b)) = \varepsilon^2 I = I$, et $\varepsilon M(a, -b) = M(\varepsilon a, -\varepsilon b) \in E$. Par commutativité, $M(a, b)$ est inversible dans $(E, \times)$ et son inverse est

$M(\varepsilon a, -\varepsilon b) = (a^2 - 3b^2)M(a, -b)$, c'est-à-dire $M(a, -b)$ si $a^2 - 3b^2 = 1$ et $M(-a, b)$ si $a^2 - 3b^2 = -1$.

4. (a) Si $a = b = 0$, $\varphi(M(a, b)) = 0$. Réciproquement, supposons $|a^2 - 3b^2| = 0$, soit $a^2 = 3b^2$. Si $b \neq 0$, alors $(\frac{a}{b})^2 = 3$, donc $\sqrt{3} = |\frac{a}{b}| \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde car $\sqrt{3}$ est irrationnel. Donc $b = 0$, puis $a^2 = 0$ et $a = 0$. Ainsi $\varphi(M(a, b)) = 0 \iff a = b = 0$.
- (b) $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif, non réduit à $\{0\}$ ($I \neq 0$). Soient $M, N \in E$ tels que $M \times N = 0$ (matrice nulle = $M(0, 0)$). Alors $\varphi(M) \times \varphi(N) = \varphi(M(0, 0)) = 0$, donc $\varphi(M) = 0$ ou $\varphi(N) = 0$ ($\mathbb{Z}$ intègre), donc d'après (a) $M = M(0, 0)$ ou $N = M(0, 0)$. L'anneau E est intègre.
- (c) Non. Par exemple $M(2, 0) = 2I \in E$ est non nul et $\varphi(M(2, 0)) = 4 \neq 1$, donc d'après 3.b, $M(2, 0)$ n'est pas inversible dans E . Un élément non nul non inversible existe : $(E, +, \times)$ n'est pas un corps.